II CEMACYC
II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
29 octubre al 1 noviembre. 2017
Cali, Colombia
REDUMATE ii.cemacyc.org

Mirar profesionalmente a través de una trayectoria de aprendizaje de las fracciones

Pere **Ivars**
pere.ivars@ua.es
Ceneida **Fernández**
ceneida.fernandez@ua.es

Resumen

Las Trayectorias de Aprendizaje se han mostrado como un instrumento que puede ayudar a los estudiantes para maestro a centrar su atención en el pensamiento matemático de los estudiantes. En este estudio, proporcionamos una trayectoria de aprendizaje de las fracciones a estudiantes para maestro con la hipótesis de que les ayudaría a estructurar su mirada sobre el aprendizaje sobre fracciones de los estudiantes de educación primaria. Nuestros resultados muestran que el uso de la trayectoria de aprendizaje permitió a los estudiantes para maestro interpretar el razonamiento sobre fracciones de los estudiantes y les ayudó a proponer nuevas actividades para ayudar a los estudiantes a progresar en su aprendizaje.

Palabras clave: mirar profesionalmente, trayectorias de aprendizaje, estudiantes para maestro, fracciones.

Introducción y marco teórico

La competencia docente mirar profesionalmente ha sido conceptualizada desde diferentes perspectivas (Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010; van Es & Sherin, 2002). En particular, Mason (2011) indicó que "mirar profesionalmente implica un cambio o un movimiento en la atención" (p. 45) identificando diferentes maneras en las que las personas somos capaces de prestar atención: i) *Holding holes* implica atender a algo pero sin discernir detalles, ii) Discernir detalles (*discerning details)* implica atender a los detalles descomponiéndolos, subdividiéndolos para establecer distinciones, iii) Reconocer relaciones (*recognizing relationships)* implica establecer relaciones entre los distintos detalles discernidos anteriormente, iv) Percibir propiedades (*perceiving properties)* consiste en ser consciente de las relaciones particulares entre diferentes situaciones como ejemplos de propiedades y v) Razonar en función de las propiedades (*reasoning in the basis of agreed properties*) implica utilizar las propiedades justificadas anteriormente para convencerse a uno mismo y a los demás a partir de razonamientos basados en definiciones y axiomas (Mason 2011, p.47).

Jacobs et al., (2010) particularizaron esta perspectiva conceptualizando la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes mediante tres destrezas. Estas destrezas ponen de manifiesto la importancia de discernir detalles en las respuestas de los estudiantes, de interpretar su pensamiento matemático en función de los detalles relevantes identificados previamente y de decidir cómo responder en base a dicha interpretación. Investigaciones previas han usado diferentes medios para apoyar a los maestros a identificar e interpretar los aspectos relevantes de las situaciones de enseñanza aprendizaje. Así, se han usado videoclips (van Es & Sherin, 2002; 2008), la participación en debates virtuales (Fernández, Llinares, & Valls, 2012) o pidiendo a los estudiantes para maestro escribir narrativas durante los periodos de prácticas en los centros (Ivars & Fernández, 2016).

Por otro lado, las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes pueden ayudar a los estudiantes para maestro a anticipar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y a dar respuesta utilizando una instrucción apropiada (Sztajn, Confrey, Wilson, & Edgington, 2012). Estudios recientes muestran que cuando los estudiantes para maestro centran su atención en trayectorias de aprendizaje de los estudiantes, en un dominio matemático concreto, desarrollan una mayor capacidad para tomar decisiones basadas en su interpretación del pensamiento matemático de los estudiantes (Wilson, Mojica, & Confrey, 2013).

Nuestro estudio se enmarca en estas líneas de investigación y analiza cómo la información sobre una trayectoria de aprendizaje sobre las fracciones en educación primaria puede ayudar a los estudiantes para maestro a mirar profesionalmente el razonamiento de los estudiantes de educación primaria sobre las fracciones. En este estudio, los estudiantes para maestro resolvieron una tarea donde debían interpretar diferentes respuestas de estudiantes de educación primaria a problemas sobre fracciones para determinar características de su comprensión y a continuación, debían proponer actividades de enseñanza que implicaran un progreso conceptual. Para resolver esta tarea, proporcionamos a los estudiantes para maestro información sobre una trayectoria de aprendizaje de las fracciones generada a partir de síntesis de investigaciones previas (Battista, 2012; Steffe, 2004; Steffe & Olive, 2010).

Una trayectoria de aprendizaje de las fracciones

Una trayectoria de aprendizaje es un camino hipotético por el que los estudiantes pueden progresar en su aprendizaje y consta de tres componentes: un objetivo de aprendizaje, la descripción de un proceso de aprendizaje y actividades de aprendizaje (Simon, 1995). La trayectoria de aprendizaje de este estudio se ha diseñado teniendo en cuenta las investigaciones sobre cómo se desarrolla el pensamiento de los estudiantes en el dominio de las fracciones (Battista, 2012; Steffe, 2004; Steffe & Olive, 2010) y se ha adaptado al contexto español.

El objetivo de aprendizaje, se deriva del currículum de educación primaria: dar sentido a la idea de fracción y su interpretación como parte-todo y comprender el significado de las operaciones de fracciones. En cuanto al proceso de aprendizaje de los estudiantes de educación primaria sobre las fracciones, hemos considerado seis diferentes niveles de comprensión. En esta comunicación presentamos las principales características de los cuatro primeros niveles, que son los implicados en la tarea de este estudio, atendiendo a la comprensión de los elementos matemáticos que los caracterizan: *i) Nivel 1* no reconocen que las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes, *ii) Nivel 2*, reconocen que las partes pueden ser diferentes en forma pero congruentes en relación al todo (en contexto continuo), *iii) Nivel 3*, identifican y representan fracciones en contexto discreto, reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes *iv) Nivel 4*, resuelven problemas aritméticos sencillos con ayuda de guía (Ivars, Fernández, &

Llinares, 2016; para consultar la trayectoria completa).

Finalmente, en cuanto a las actividades de aprendizaje para apoyar la transición de los estudiantes de educación primaria a través de estos niveles, se consideraron actividades de identificación, comparación y representación de fracciones y suma y resta de fracciones. En estas actividades se emplearon tanto fracciones propias como impropias y contextos continuos y discretos.

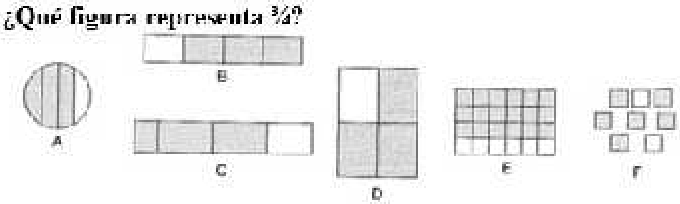
Método

Participantes e instrumento

En este estudio participaron 95 estudiantes para maestro del Grado en Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Alicante (España). Estos estudiantes para maestro se encontraban matriculados en una asignatura centrada en analizar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. En los cursos anteriores, estos estudiantes para maestro habían cursado una asignatura relacionada con Sentido Numérico y otra con Sentido Geométrico.

Los estudiantes para maestro analizaron las respuestas de tres parejas de estudiantes de educación primaria a una actividad de identificación de fracciones (Figura 2, Ivars et al., 2016; para consultar la tarea completa).

1. ¿Qué figura representa ¾?



Víctor: Nosotros creemos que la figura A, B C y D representan tres-cuartos.
Xavi: Sí porque A, B, C y D son 3 partes de 4 sombreadas, es decir 3/4

Tere: Nosotros creemos que la figura B y D son tres cuartos porque están divididas en cuatro partes iguales y hay tres sombreadas. Las figuras A y C tienen 3 partes de 4 sombreadas, pero las partes no son iguales…
Joan: La figura E no son ¾ porque si te fijas están divididos en 24 partes iguales y hay pintadas 18.
Tere: Eso es, no son tres-cuartos.
Maestra: Entonces la F…
Ambos:…. Tampoco, eso son 6 cuadrados sombreados

Félix: Sí. La A, B C y D son como dicen Joan y Tere, lo que pasa es que la E la hemos hecho diferente…
Maestra: ¿Cómo? Explícanoslo
Álvaro: Bueno… mmmm pues así, mira. Si te fijas cada línea tiene 6 cuadritos, es decir son todas iguales, y como hay 3 líneas sombreadas de las 4 pues entonces son tres cuartos. Además… para la F también son tres cuartos porque si haces así (agrupando los cuadros de 2 en 2), obtienes 4 grupos de 2 cuadros, y de esos 4 grupos, 1,2 y 3 (señalando a la vez que cuenta cada grupo sombreado) están sombreados, que son tres grupos sombreados de los cuatro que tenemos

Figura 2. Actividad de identificación de fracciones (adaptada de Battista, 2012) y repuestas hipotéticas de estudiantes de educación primaria que reflejan diferentes niveles de comprensión

Xavi y Víctor (pareja 1) no tienen en cuenta que las partes del todo deben ser congruentes al decir que *las figuras A, B, C y D representan ¾* (Nivel 1). Joan y Tere (pareja 2) identifican que las partes deben ser congruentes en contextos continuos, pero no reconocen que una parte puede ser dividida en otras partes. Esta última característica se evidencia cuando dicen que la Figura E no representa 3/4 porque está dividida en 24 partes iguales y hay 18 sombreadas (Nivel 2). Finalmente, Álvaro y Félix (pareja 3) consideran que las partes deben ser congruentes y que una parte puede estar dividida en otras partes (escogen las Figuras B, D, E y F como representaciones de ¾) (Nivel 3). Para organizar el análisis de las respuestas por parte de los estudiantes para maestro les proporcionamos las siguientes preguntas:

- Describe la tarea en función del objetivo de aprendizaje: ¿cuáles son los elementos matemáticos que el resolutor debe usar para resolverlo?
- Describe cómo ha resuelto cada pareja de estudiantes la tarea identificando cómo han utilizado los elementos matemáticos implicados y las dificultades que han tenido con ellos
- ¿En qué nivel de la Trayectoria de Aprendizaje situarías a cada pareja? Justifica tu
- Define un objetivo de aprendizaje y propón una actividad (o modifica la propuesta) para ayudar a los alumnos a progresar en la comprensión de las fracciones según la Trayectoria de Aprendizaje prevista

Los estudiantes para maestro tenían información sobre la trayectoria de aprendizaje, los niveles de desarrollo y características de posibles tareas a proponer a los niños según su nivel de comprensión.

Análisis

Las respuestas de los estudiantes para maestro se analizaron en función de la manera en que *i)* identificaron elementos matemáticos del concepto de fracción en las respuestas de los estudiantes de primaria (discernir detalles), *ii)* interpretaron la comprensión de las fracciones de los estudiantes (estableciendo relaciones entre los elementos identificados y los niveles de desarrollo de la trayectoria de aprendizaje), *iii)* propusieron decisiones de acción vinculadas a la interpretación del razonamiento de los estudiantes, con la intención de ayudarles a progresar en su aprendizaje.

Tres investigadores realizamos un análisis inductivo previo de una muestra de respuestas de estudiantes para maestro de manera individual. Estos análisis fueron posteriormente discutidos y comparados hasta que se consensuó un acuerdo y se procedió al análisis de los datos completos. Así, entendemos que la identificación de los elementos relativos al concepto de fracción por parte de los EPM implica que en sus respuestas usen los elementos: *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes* y *una parte puede estar dividida en otras partes* cuando describen las respuestas de los estudiantes a la actividad propuesta. En cuanto a la interpretación del razonamiento fraccionario, consideramos la capacidad para relacionar los elementos matemáticos descritos en las respuestas de los estudiantes con los distintos niveles de la trayectoria de aprendizaje. Finalmente, consideramos como decisión de acción que los estudiantes para maestro propusieran un objetivo de aprendizaje coherente con la transición entre niveles de la trayectoria de aprendizaje y una actividad adecuada para alcanzar dicho objetivo.

Resultados

Los resultados muestran que la trayectoria de aprendizaje ayudó a los estudiantes para maestro (EPM) a centrar su atención en el razonamiento de los estudiantes sobre las fracciones y les ayudó a proponer actividades para promover su progreso conceptual. A continuación, mostraremos a través de extractos del protocolo de la EPM73 cómo la trayectoria de aprendizaje le ayudó a identificar elementos matemáticos de las respuestas de los estudiantes, a inferir características de su comprensión y a proponer actividades para ayudarles a progresar. La Figura 3 recoge la respuesta de esta EPM para Víctor y Xavi.

Víctor y Xavi:

Entienden que de 4 partes deben coger 3 en las figuras A, B, C y D.

Sin embargo presentan dificultades en los siguientes elementos matemáticos:

- Reconocer que las partes deben ser congruentes, en la figura A y C sus partes no son congruentes pues no ocupan el mismo área o superficie.

- Una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte pues no eligen la figura E, que representaría tanto $\frac{18}{24}$ como $\frac{3}{4}$

Situaría a Víctor y Xavi en el nivel 1 de la Trayectoria de Aprendizaje porque no reconocen que las partes en que queda dividida una fracción sean congruetes

Figura 3. Respuesta del EPM73 en relación a la pareja de Víctor y Xavi

Esta EPM identificó en la respuesta de esta pareja los elementos matemáticos: *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes y una parte puede estar dividida en otras partes* utilizando la respuesta (“las figuras A, B, C y D representan ¾”) para interpretar que la pareja tiene dificultades con ambos elementos. Con el elemento *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes*, cuando eligen las figuras A y C como representantes de ¾ (que no presentaban partes iguales), y además, el hecho de no identificar la Figura E como ¾ sirvió de evidencia para esta EPM de sus dificultades en la comprensión del elemento *una parte puede estar dividida en otras partes*. La identificación de los elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes permitió a esta EPM interpretar la comprensión de los estudiantes. Esta EPM indicó que Víctor y Xavi, tienen una comprensión de las fracciones *m/n* como dividir un todo en *n* partes y tomar *m*, sin tener en cuenta la congruencia de las partes (este hecho se evidencia cuando el EPM escribe “Entienden que de 4 partes deben coger 3...”) situando a Víctor y Xavi en el nivel 1 de la trayectoria de aprendizaje (relacionando las características identificadas sobre la comprensión con los niveles de la trayectoria de aprendizaje proporcionada). A continuación, la EPM73 interpretó las respuestas de Tere y Joan (Figura 4) utilizando los elementos matemáticos de las respuestas de los estudiantes de primaria como evidencia para apoyar sus interpretaciones:

Joan y Tere

Ellos ya saben que las partes deben ser congruentes, como demuestran eligiendo las figuras B y D, ya que razonan que A y C no están divididas en partes congruentes.

Así y todo, presentan dificultades en los siguientes elementos:

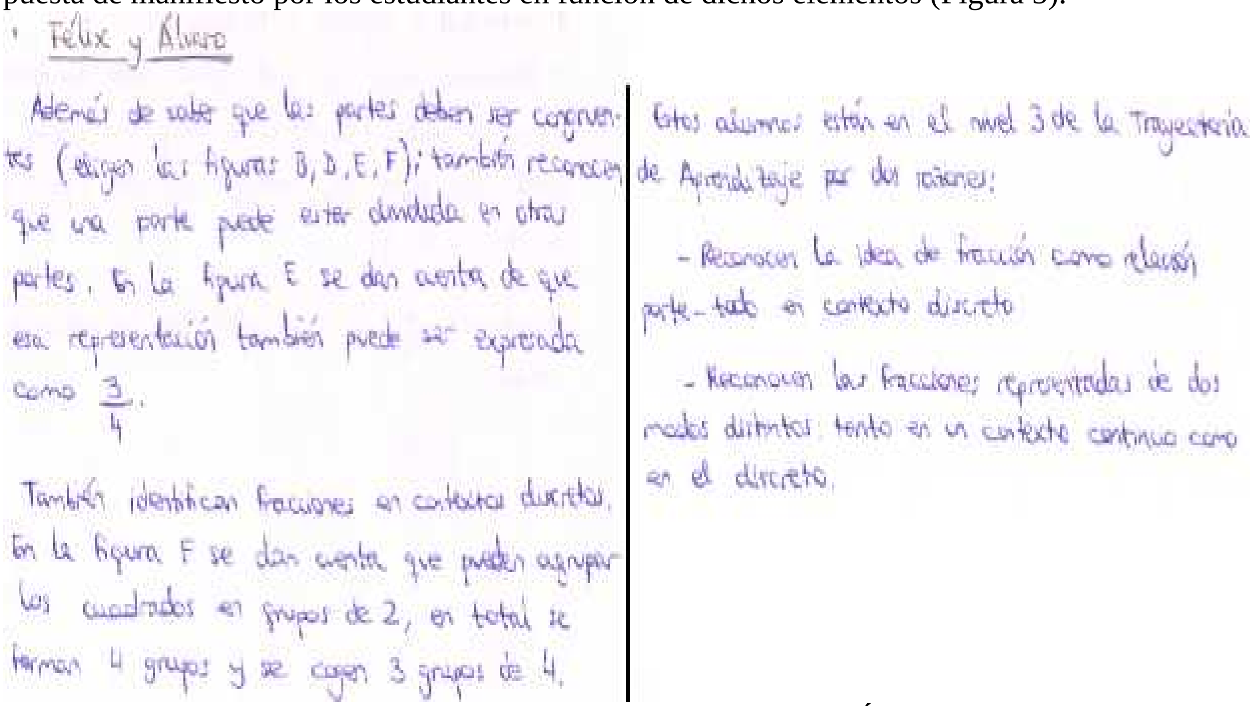
- No reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes, sería el caso de la figura E, que podría estar representada por dos fracciones: $\frac{18}{24}$ o $\frac{3}{4}$.

- No identifican fracciones en contextos discretos. Por ejemplo en la figura F no agrupan, sólo ven el número de cuadrados coloreados (Víctor y Xavi también tienen dificultad en este elemento).

Esta pareja la podríamos situar en el nivel 2 de la Trayectoria de Aprendizaje porque sí reconocen que las partes de una fracción deben ser congruentes pero sólo en contextos continuos.

Figura 4. Extracto del protocolo del EPM73 en relación a la pareja de Joan y Tere

Así, esta EPM interpretó que Joan y Tere (Figura 4) comprendían el elemento matemático *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes* al elegir las figuras B y D como ¾ y descartar las representaciones A y C porque "no están divididas en partes congruentes." También, identificó sus dificultades con el elemento matemático *una parte puede estar dividida en otras partes*, haciendo referencia a las dificultades de esta pareja para reconocer la figura E como ¾. Finalmente, esta EPM utilizó la no elección de la figura F como representante de ¾, como evidencia de las dificultades de esta pareja para identificar fracciones en contextos discretos. La confluencia de todas las evidencias anteriores, indicó a la EPM73 que Joan y Tere se encuentran en el nivel 2 de la trayectoria de aprendizaje. Igualmente, esta EPM identificó ambos elementos matemáticos en las respuestas de Félix y Álvaro e interpretó la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes en función de dichos elementos (Figura 5).



• Félix y Álvaro

Además de saber que las partes deben ser congruentes (eligen las figuras B, D, E, F); también reconocen que una parte puede estar dividida en otras partes. En la figura E se dan cuenta de que esa representación también puede ser expresada como $\frac{3}{4}$.

También identifican fracciones en contextos discretos. En la figura F se dan cuenta que pueden agrupar los cuadrados en grupos de 2, en total se forman 4 grupos y se cogen 3 grupos de 4.

Estos alumnos están en el nivel 3 de la Trayectoria de Aprendizaje por dos razones:

- Reconocen la idea de fracción como relación parte-todo en contexto discreto

- Reconocen las fracciones representadas de dos modos distintos tanto en un contexto continuo como en el discreto.

Figura 5. Extracto EPM73 en relación a la pareja formada Félix y Álvaro

Esta EPM identificó que la pareja 3 comprende que *las partes en las que se divide el todo deben ser congruentes* ("eligen las figuras B, D, E, F") y que *una parte puede estar dividida en otras partes* porque "En la figura E se dan cuenta de que esa representación también puede ser expresada como ¾", y además, la identificación de la figura F por esta pareja, fue tomada por la EPM como evidencia de que son capaces de reconocer fracciones en contextos discretos.

Los EPM que, como la EPM73, identificaron los elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes e interpretaron su razonamiento estableciendo relaciones entre los elementos matemáticos y los niveles de la trayectoria de aprendizaje, proporcionaron un mayor número de actividades dirigidas a apoyar la progresión en el aprendizaje. Así, la EPM73 propuso para Víctor y Xavi el objetivo (para progresar desde el nivel 1 hasta el nivel 2): "Reconocer en contexto continuo que las partes en que se divide un todo pueden ser diferentes en forma pero deben ser congruentes" y la actividad de la Figura 6. En ella se solicita la representación de una fracción 2/4 (f<1) de tres maneras diferentes sobre un todo dado en contexto continuo. Esta actividad se considera coherente con el objetivo propuesto ya que incide en la necesidad de conseguir que los estudiantes comprendan que el todo está formado por partes congruentes y el reconocimiento de que las partes en que se divide un todo pueden ser diferentes en forma pero deben ser congruentes en relación al todo.

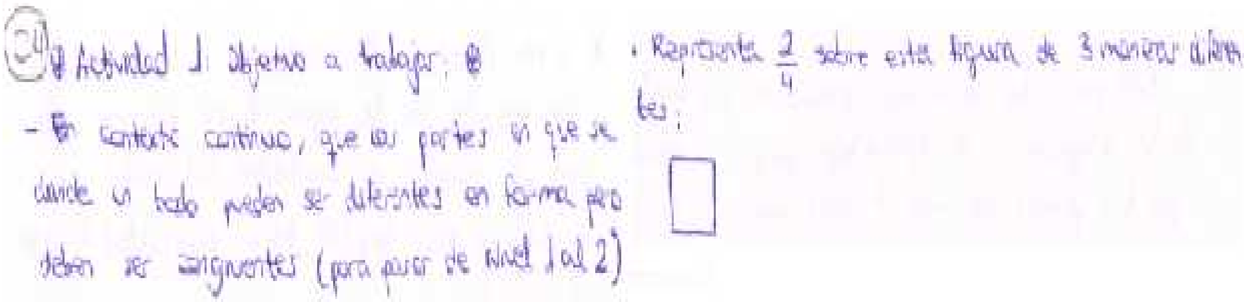


Figura 6. Actividad propuesta para la pareja de Víctor y Xavi por la EPM73

Para la pareja formada por Joan y Tere, propuso el siguiente objetivo de transición entre el nivel 2, en el que se les había situado, y el nivel 3: “Reconocer que una parte puede estar dividida en otras partes / considerar un grupo de partes como una parte.” La actividad propuesta (Figura 7) también es coherente con el objetivo propuesto ya que solicita a los estudiantes representar una fracción propia (2/4) en un contexto discreto (conjunto de 12 bolas). Para resolver la actividad el estudiante debe de reconocer que 2/4 se puede representar en un conjunto de 12 bolas, ya que es equivalente a 6/12.

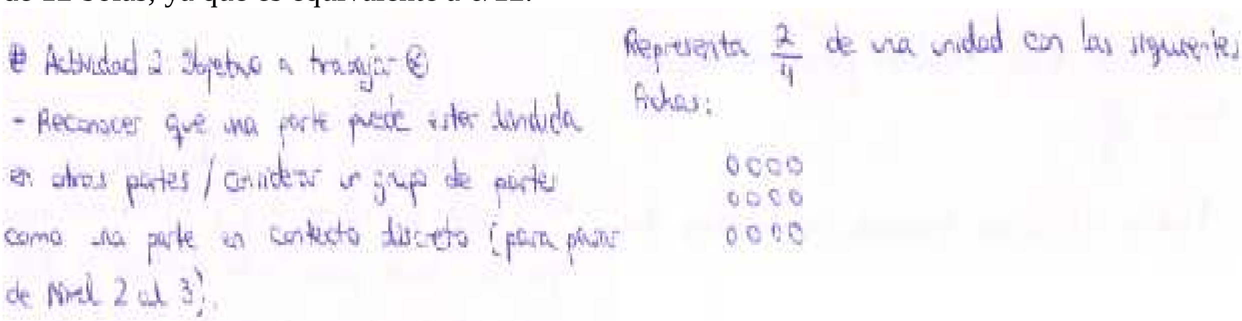


Figura 7. Actividad propuesta para la pareja de Joan y Tere por la EPM73

Discusión y conclusiones

Extractos de protocolos como los que acabamos de mostrar en la sección de resultados indican cómo la trayectoria de aprendizaje permitió a los EPM estructurar su mirada sobre el pensamiento matemático de los estudiantes. Utilizando la trayectoria de aprendizaje sobre fracciones, los EPM fueron capaces de identificar los elementos matemáticos en las respuestas de los estudiantes de primaria, y posteriormente, de interpretar la comprensión de los estudiantes de primaria estableciendo relaciones entre los elementos matemáticos que se habían identificado y los diferentes niveles de la trayectoria de aprendizaje.

Estos estudiantes para maestro fueron capaces de proponer un objetivo de aprendizaje para apoyar la progresión en el aprendizaje (en función de las características de su razonamiento fraccionario). Además, aportaron actividades específicas para dicho objetivo de aprendizaje. Estos resultados, en la línea de investigaciones previas, muestran que las trayectorias de aprendizaje pueden ayudar a los estudiantes para maestro a identificar los objetivos de aprendizaje de su alumnado, a anticipar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y a dar respuesta utilizando una instrucción apropiada (Sztajn et al., 2012; Wilson et al., 2013).

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por el Ministerio de Ciencia e Innovación (MINECO, España) EDU2014-54526-R y por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte para la Formación de Profesorado Universitario (España) FPU14/07107 (primer autor).

Referencias y bibliografía

Battista, M.T. (2012). *Cognition-Based Assessment and Teaching of Fractions: Building on Students' Reasoning*. Portsmouth, N.H. Heinemann.

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. ZDM. *Mathematics Education*, *44,* 747-759.

Ivars, P., & Fernández, C. (2016). Narratives and the development of the skill of noticing**.** In Csíkos, C., Rausch, A., & Szitányi, J. (Eds.). *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 19–26. Szeged, Hungary: PME.

Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2016). Pre-service teachers' learning to notice students' fractional thinking: The design of a learning environment through a Learning Trajectory. *ERME. European Society for Research in Mathematics Education.* Berlin. https://www.hu-berlin.de/de/einrichtungen-organisation/wissenschaftliche-einrichtungen/zentralinstitute/pse/erme/scientific-programme-1/papers

Jacobs, V.R., Lamb, L.C., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169-202.

Mason, J. (1998). Enabling teachers to be real teachers: Necessary levels of awareness and structure of attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *1*(3), 243-267.

Mason, J. (2011). Noticing: roots and branches. In M. G. Sherin, V.R. Jacobs, and R. A. Philipp, (Eds.) *Mathematics Teacher Noticing: Seeing Through Teachers' Eyes.* (pp.35-50). New York: Routledge.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 114-145.

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 129-162.

Steffe, L., & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. Springer Science & Business Media.

Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P. H., & Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction toward a theory of teaching. *Educational Researcher*, *41*(5), 147-156.

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, *10*(4), 571-595.

van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers'"learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and teacher education*, *24*(2), 244-276.

Wilson, P. H., Mojica, G. F., & Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 103-121.