



II CEMACYC

II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

29 octubre al 1 noviembre. 2017

Cali, Colombia

ii.cemacyc.org



CIAEM
CME
desde - since 1961



Cambio de concepciones de profesores universitarios sobre las causas de los errores (de sus estudiantes) en el aprendizaje de la Matemática

Henry Alexander **Ramírez** Bernal

Doctorado Interinstitucional en Educación “DIE”, Universidad Distrital “Francisco José de Caldas”

Colombia

haramirezb@correo.udistrital.edu.co

Resumen

Se presentan avances de una investigación doctoral que pretende caracterizar y describir posibles cambios en las concepciones de un grupo de profesores universitarios de primeros semestres sobre las causas del error en Matemática de sus estudiantes. Para lo anterior se busca que los participantes reflexionen y discutan críticamente sobre las causas del error en reuniones de focus group y entrevistas individuales en un ambiente promovido por la presentación de algunas nociones propuestas desde la Didáctica de la Matemática¹ que ayudan a comprender las posibles causas de tales errores. A partir de la información recolectada en una investigación antecedente² desarrollada por Ramírez (2013) se obtuvieron algunos resultados preliminares que indican posibles cambios en las concepciones de un grupo de profesores en relación a las causas del error en Matemática y que contribuyen a sustentar los propósitos de la investigación doctoral.

Palabras clave: causas del error en el aprendizaje matemático universitario, obstáculo, misconcepción, contrato didáctico, conversión, tratamiento, cambio de concepciones.

Errores, obstáculos, dificultades, misconcepciones en el aprendizaje de la Matemática

El error en Matemática evidencia la presencia de diferentes factores que pueden oponerse al aprendizaje de la Matemática, por lo que su estudio es fundamental si se quiere comprender el

¹ Algunas de las cuales se presentan como referentes teóricos en la primera parte de este artículo.

² En la que se realizó un análisis semiótico, didáctico y epistemológico del error en el aprendizaje de la Matemática

proceso de aprendizaje matemático. Matz (1980, como se cita en Ruano, Socas & Palarea, 2008, p. 2) señala que los errores son “intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación”, en acuerdo con las ideas de Brousseau (1983); Ruano, Socas y Palarea (2008, p. 2) afirman además que los errores en Matemática aparecen “principalmente en el trabajo de los alumnos cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben”. Por otra parte D'Amore, Fandiño, Marazzani y Sbaragli (2010) señalan que un error puede considerarse como la manifestación de un malestar cognitivo cuya causa principal es un conocimiento previo que no se adapta a nuevas situaciones. Para Brousseau (2001) los errores son específicos de un conocimiento y/o de una situación matemática siendo inherentes al aprendizaje y la enseñanza.

Obstáculos, dificultades y misconcepciones en el aprendizaje matemático

Para D'Amore, Fandiño, Marazzani y Sbaragli (2010) los obstáculos son cualquier cosa que se interpone al aprendizaje en la dirección docente – estudiante, no son necesariamente falta de conocimiento y a veces son expresiones de conocimiento; además señalan que el estudiante utiliza este conocimiento para dar respuesta adecuada en un contexto conocido encontrado en precedencia pero puede fracasar cuando lo usa fuera de ese contexto, generando respuestas incorrectas. De acuerdo a Brousseau (1976) los obstáculos en el aprendizaje matemático pueden ser de carácter ontogenético, didáctico o epistemológico. Los obstáculos ontogenéticos se vinculan a las limitaciones de las capacidades cognitivas de los estudiantes dentro del proceso de enseñanza (Artigue, 1990); los obstáculos didácticos “son los que parecen no depender más que de una elección o de un proyecto de sistema educativo” (Brousseau, 1976, p. 10). Sobre los obstáculos epistemológicos Brousseau (1976) declara que son constitutivos del conocimiento en que se apuntan y se pueden encontrar en la historia de los conceptos mismos.

De acuerdo con Godino, Batanero y Font (2003, p. 69) el término dificultad “indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio.” Por otra parte D'Amore, Fandiño, Marazzani y Sbaragli (2010) sostienen que la dificultad en Matemática puede asumir por lo menos tres sentidos distintos: la dificultad en Matemática del estudiante, la dificultad específica de algunos argumentos de la Matemática y la dificultad del docente en la gestión de una situación matemática. De acuerdo con Fandiño Pinilla (2005) la dificultad en Matemática se puede analizar específicamente de acuerdo a varios componentes en el aprendizaje de la Matemática. Para Fandiño Pinilla (2010) estas componentes se pueden considerar mediante 5 tipologías de aprendizaje diferentes, no libres de superposiciones: conceptual, algorítmico, estratégico, comunicativo y aprendizaje y gestión de las representaciones semióticas.

En el proceso de construcción cognitiva de los objetos matemáticos durante el aprendizaje pueden generarse conceptualizaciones erróneas que de perdurar obstaculizan la comprensión matemática, dando lugar a lo que se conoce en Didáctica de la Matemática como una *misconcepción*³. D'Amore (1999) define constructivamente este término señalando que aunque una *misconcepción* es un concepto erróneo y el cual genéricamente debe evitarse, no debe

³ El término *misconcepción* en idioma español se considera como equivalente a la palabra inglesa *misconception* y al término en italiano *misconcezione*; D'Amore y Sbaragli (2005, p. 140) se refieren textualmente a la palabra inglesa *misconception* en estos términos: “La parola inglese *misconception* è interpretata solitamente come giudizio erroneo, idea sbagliata, ma anche equivoco o malinteso; si trova intesa anche nel senso più esteso di concezione fallace.”

considerarse como una situación totalmente negativa; este Autor señala que para lograr la construcción de un concepto es necesario pasar por una misconcepción momentánea en el transcurso de la sistematización. Algunas misconcepciones se derivan directamente de la trasposición didáctica del saber y son denominadas por Sbaragli (2005) *evitables* pues son consecuencia de las elecciones del profesor; también Sbaragli (2005) llama la atención sobre las misconcepciones *inevitables* debidas a la inevitabilidad del paso por las representaciones semióticas de los objetos matemáticos.

Contrato didáctico, representaciones semióticas, creencias y concepciones

El contrato didáctico constituye uno de los aportes de Brousseau de mayor trascendencia a la Didáctica de la Matemática por su potencial para explicar las complejas y diversas interacciones entre el docente y el estudiante en relación al saber matemático (referencia y objeto de aprendizaje) y su funcionamiento en el aula. Para Brousseau (1986, como se cita en D'Amore, 2005) en una situación de enseñanza preparada y realizada por el maestro, el contrato didáctico está constituido por los hábitos específicos del profesor esperados por el alumno y los comportamientos del alumno esperados por el profesor. En D'Amore, Fandiño, Marazzani y Sarrazy (2010) se presenta una visión crítica y moderna sobre el contrato didáctico. Algunos efectos⁴ que se desprenden de la noción de contrato didáctico contribuyen a explicar las causas de algunas tipologías de errores en el aprendizaje matemático.

El análisis semiótico de los errores en el aprendizaje matemático implica la comprensión de cómo *funcionan* las representaciones semióticas de los objetos matemáticos y sus transformaciones (tratamiento y conversión) durante el aprendizaje de los estudiantes. Para Duval (2006) estas transformaciones están en el corazón de la actividad matemática y su diferenciación constituye el primer requisito metodológico para analizar los problemas de comprensión matemática de los estudiantes. Tanto la conversión (Duval, 2006) como el tratamiento (D'Amore, 2006; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007; Santi, 2010; Rojas, 2014) son fuente de fuertes dificultades en el aprendizaje matemático.

Creencias

Algunos Autores como Moreno y Azcárate (2003) y Pajares (1992) coinciden en reconocer el carácter subjetivo de las creencias; Pajares (1992) caracteriza las creencias como verdades personales indiscutibles que se derivan de la experiencia o la fantasía y con fuerte componente evaluativo y afectivo. Para Moreno y Azcárate (2003, p. 67) las creencias “no se fundamentan sobre la racionalidad, sino más bien sobre los sentimientos, las experiencias y la ausencia de conocimientos específicos del tema con el que se relacionan, lo que las hacen ser muy consistentes y duraderas para cada individuo.” Törner, Rolka, Rösken y Sriraman (2010) señalan que las creencias deben verse en coherencia con otras creencias, fenómeno que puede describirse mediante la expresión *sistema de creencias*. Para García, Azcárate y Moreno (2006) las creencias del profesor se asocian a ideas personales e influyen en su toma de decisiones, influyen en el proceso enseñanza aprendizaje, tienen un valor afectivo, son un tipo de conocimiento y se justifican sin rigor alguno.

⁴ Entre estos efectos se pueden citar (Brousseau, 2007): el efecto Topaze, el efecto Jourdain, los deslizamientos metacognitivos y metadidácticos, el uso abusivo de la analogía y el envejecimiento de las situaciones de enseñanza.

Concepciones

En contraste con las creencias, los investigadores reconocen en la noción de concepción un estatus de mayor racionalidad, elaboración cognitiva y de consciencia. Pehkonen y Pietilä (2003) definen las concepciones como creencias conscientes, formando así un subgrupo de las creencias. Lloyd (1999) considera que las concepciones abarcan tanto conocimiento individual como creencias. Para García, Azcárate y Moreno (2006) las concepciones del profesor forman parte del conocimiento, son producto del entendimiento, actúan como filtros en la toma de decisiones e influyen en los procesos de razonamiento. Thompson (1992, como se cita en Golafshani, 2002) señala que la concepción del profesor sobre la Matemática consiste de creencias conscientes y subconscientes, conceptos, significados, reglas, imágenes mentales y preferencias en cuanto a la disciplina de la Matemática. De acuerdo con Godino, Batanero y Font (2003) las creencias del profesor sobre los errores de los alumnos dependen de sus propias concepciones sobre las matemáticas. Para los propósitos de la investigación doctoral se asume el sentido de racionalidad y elaboración cognitiva de las concepciones a diferencia de las creencias que no se sustentan en la racionalidad.

Cambio de concepciones de profesores sobre las causas del error en Matemática

Lerman (1999) afirma que en el corazón de la investigación sobre las creencias de los profesores está el argumento que las creencias y las concepciones de los profesores o los estudiantes para profesor deben cambiar para que cambie su enseñanza y la forma de evaluar los errores y de poner en marcha algo que ayude a los estudiantes. Aunque cambios sustantivos en los profesores son concebidos generalmente como procesos graduales, complejos y difíciles (Guskey, 2003, como se cita en Bobis, Way, Anderson, & Martin, 2016) algunos Autores como Liljedahl (2010) han notado cambios rápidos y profundos en las creencias y prácticas de los profesores. Por otra parte Ball, Thames y Phelps (2008) han señalado que la enseñanza experta (en Matemática) requiere de la capacidad de juzgar el origen de los errores matemáticos; también el profesor debe estar en capacidad de analizar fluida y eficientemente los errores matemáticos de sus estudiantes. Las creencias y concepciones de los profesores inciden en la forma como ellos analizan y abordan los errores (y sus posibles causas) en Matemática de sus estudiantes como lo han mostrado algunas investigaciones. Estudios de Charnay (1989), Economou (1995) y Milhaud (1980) citados por Gagatsis y Kyriakides (2000) y de Ramírez (2013) sugieren que los profesores atribuyen las causas de los errores en Matemática de sus estudiantes a hechos que se distancian de los referentes teóricos y de investigación (por ejemplo de la Didáctica de la Matemática) que intentan desde hace años y en diferentes direcciones explicar las causas reales de estos errores. De lo anterior puede afirmarse que ciertas creencias y concepciones de los profesores pueden influir negativamente en sus explicaciones sobre las causas del error en Matemática.

Considerando lo anterior, en la investigación doctoral se busca profundizar en la comprensión, descripción y caracterización de los posibles cambios que ocurren en las concepciones de un grupo de profesores de Matemática (en ejercicio) de primeros semestres de Universidad sobre las causas de los errores de sus estudiantes. Mediante la discusión y reflexión crítica en torno a las posibles causas del error en Matemática, desarrolladas en dos escenarios (focus group y entrevistas personales) se busca obtener información que permita determinar y caracterizar mediante un análisis de corte cualitativo descriptivo: ¿Qué cambios en las concepciones de los profesores sobre las causas de los errores en el aprendizaje de la Matemática se producen a partir de la reflexión crítica (a la luz de los estudios en Didáctica de la

Matemática) sobre el análisis de los errores de sus estudiantes? ¿Qué factores inciden en esos cambios? ¿Si no hay cambios, a que se debe? ¿Cómo incide la discusión entre pares en los cambios de concepción de los profesores en esta temática?

Aspectos Metodológicos y resultados esperados

Durante las reuniones en focus group y entrevistas individuales, el Investigador promueve el estudio, la discusión, el debate y la reflexión entre los participantes a propósito de la teoría de obstáculos y la teoría de las representaciones semióticas de Duval como referentes en Didáctica de la Matemática que contribuyen a explicar las causas del error en Matemática. Se espera que como resultado de las discusiones y reflexiones algunos de los profesores participantes cambien sus concepciones⁵ sobre el error en Matemática reconociendo los referentes teóricos que ayudan a comprender su naturaleza y los incorporen a sus análisis sobre las causas del error. Los profesores participantes en el estudio serán docentes de Matemática actualmente en ejercicio, con diverso nivel de formación y experiencia y que orienten cursos en los tres primeros semestres de Universidad en programas en los cuales la Matemática es determinante.

Creencias y concepciones de algunos profesores universitarios sobre el error en Matemática y sus causas

La investigación realizada por Ramírez (2013) constituye un antecedente de la investigación doctoral. En ese estudio se entrevistó a un grupo de profesores de Matemática con el propósito de conocer sus explicaciones sobre el error en el aprendizaje de la Matemática y sus posibles causas y contrastarlas frente a referentes teóricos como los citados previamente en el documento. Estas explicaciones muestran (al menos parcialmente) las concepciones que tienen los profesores sobre el error en Matemática y sus causas. Durante el proceso de recolección de la información se evidenciaron posibles cambios o indicios de ellos a partir de la interacción con el investigador y las reflexiones generadas. En este documento se reportan algunos de estos indicios de cambio de concepción y que se constituyen en antecedente de la investigación doctoral, la cual centra su foco de atención en los *cambios de concepción sobre las causas del error en Matemática*. Considérese el caso del profesor Miguel quien en el cuestionario escrito tiende a responsabilizar al estudiante por sus errores en Matemática:

Miguel: Muchas veces los estudiantes cometen tales errores por la ligereza con que abordan los ejercicios; cuando me refiero a ligereza lo digo en el sentido de que los estudiantes no se detienen a observar las operaciones que están representadas, sino que en medio de su afán por responder rápidamente cometen esta serie de errores.

También Miguel atribuye el error a problemas asociados con la lectura y la interpretación tanto en el cuestionario escrito como en la entrevista personal; en la entrevista afirma:

Miguel (entrevista personal): Otro aspecto es que se evidencia en muchos estudiantes la falta de lectura y de interpretación, en básicamente problemas que se colocan de enunciados, para plantear una ecuación, me parece fundamental trabajar ese tipo de ejercicios, para que el estudiante interprete una situación real, y a partir de ella plasme esa situación en una ecuación y lo pueda resolver y no limitarse simplemente a resolver ecuaciones de manera mecánica, entonces ahí se evidencia una falta de interpretación y también una falta de utilización adecuada de signos de puntuación y de interpretación

⁵ Los posibles cambios en las concepciones de los profesores se establecerán mediante instrumentos de análisis que permitan contrastar las concepciones sobre el error en diferentes momentos de la intervención.

que se hace de los problemas.

Posteriormente durante la misma entrevista, frente a la pregunta formulada por el Investigador en torno a la posible influencia de la naturaleza de los objetos matemáticos como causas del error, se observa un indicio de reflexión por parte de Miguel que contrasta con lo expresado en las respuestas anteriores:

Investigador: ¿Usted cree que esos posibles errores o dificultades de los estudiantes podrían tener algún origen o alguna explicación también en la naturaleza propia de los conceptos que están involucrados? Es decir ¿de las matemáticas que están involucradas?

Miguel: Bueno ese tipo de reflexión, le soy sincero, no lo he hecho, o sea tocaría hacer como un análisis más detenido en cuanto a la naturaleza misma de las matemáticas como para ver de pronto, no estoy diciendo, refutando, afirmando o negando que pueda haber un elemento dentro del mismo.

Después de contestar otras preguntas, Miguel retoma libremente la cuestión sobre la naturaleza de los objetos matemáticos para reforzar su reflexión:

Respecto a la pregunta que si la naturaleza misma de las matemáticas puede incidir en que los estudiantes cometan errores pues realmente la pregunta me sorprendió mucho porque, pues ese tipo de reflexiones nunca lo había hecho, y ahora que me lo hacen, me parece que de pronto puede ser un elemento constitutivo en cuanto que los estudiantes puedan cometer errores, un aspecto de ello es por ejemplo cuando cometen errores de simplificación, la representación misma simbólica de las matemáticas, hace de pronto o induce al estudiante a cometer errores, es un juicio que hago digamos intuitivamente, cuando se representa un x^2 en el denominador y en un numerador el estudiante identifica dos representaciones idénticas que de pronto lo llevan a intuir que eso se pueda simplificar sin tener en cuenta otras operaciones involucradas, pero ahí hay un factor a mi modo de ver definitivamente o determinantemente incidente sobre los errores comúnmente cometidos por los estudiantes.

El profesor Fernando atribuye también la responsabilidad de los errores a los estudiantes indicando como causas de estos problemas de mala interpretación, deficiente lectura o que los estudiantes están *mal acostumbrados* y siempre buscan una respuesta:

Creo que el que los estudiantes no hagan una buena lectura de los ejercicios y de los problemas de entrada hace que ya empiecen equivocándose, aparte que los estudiantes en Colombia cuando llegan a la educación superior vienen mal acostumbrados, esto quiere decir que los estudiantes siempre tienen la necesidad de dar respuesta a los problemas así no sepan, el estudiante así no sepa, requiere dar algún tipo de cierre a las situaciones con las que se enfrenta en una sesión de clase, entonces eso hace que el estudiante a veces prefiera equivocarse, sabiendo que lo está haciendo, antes de describir o simplemente dejar el enunciado o el problema sin resolver.

Sin embargo a través del diálogo establecido con el Investigador, el profesor Fernando da muestras de reconocer otros posibles factores (diferentes al estudiante) que afectan el desempeño de sus estudiantes en Matemática y que podrían ser causa de sus errores; así un factor mencionado por Fernando es que los estudiantes no reciben una buena formación en el colegio:

Yo puedo evocar varias situaciones...uno el tipo de formación escolar que tienen los estudiantes, entonces cuando un estudiante es escolar cuando está en el colegio no suele recibir un buen tipo de formación, entonces eso nos hace pensar o nos podría hacer llegar a pensar que el error que ellos cometen se debe al tipo de formación que han sufrido por decirlo de alguna manera porque el estudiante no ha contado con una buena formación.

Posteriormente Fernando reconoce el rol fundamental del docente en la formación Matemática de sus estudiantes:

Creo que a veces los profesores cuando estamos frente a un grupo de estudiantes de Precálculo, nos olvidamos que los que tenemos al frente realmente son seres humanos y nos preocupa únicamente abordar las temáticas y los conceptos pasando por encima arbitraria e irresponsablemente. El estudio de la matemática va a generarles dificultades y errores a los estudiantes. Uno los tiene que cometer, creo que si no fuera así no sería interesante el estudio de la matemática. Pero si creo que en gran medida la responsabilidad del docente implica que cuando vea y reconoce que el estudiante está cometiendo algún tipo de error la estrategia pedagógica no es solamente darle la respuesta correcta sino realmente llevarlo a que el haga un análisis de en que se está equivocando, pero eso no suele pasar aquí.

Aunque en las explicaciones de los profesores participantes en el estudio de Ramírez (2013) se identifican algunas referencias a nociones como representaciones semióticas o contrato didáctico (y otras no mencionadas aquí) éstas no son identificadas explícitamente con la terminología teórica propia de la Didáctica de la Matemática, marco de referencia oportuno para el estudio crítico de las causas del error en Matemática. Sin embargo este estudio mostró cómo la reflexión crítica (motivada por la interacción y la discusión en la investigación citada) por parte de los profesores sobre las causas del error en Matemática puede contribuir a cambiar sus concepciones sobre el error y sus causas.

A manera de conclusión

Una pregunta frecuente que se ha formulado el Autor de la Investigación Doctoral tanto en su ejercicio docente como en su proceso de formación en Educación Matemática ha sido ¿por qué a pesar de la gran cantidad de resultados de Investigación y referentes teóricos que nos ofrece la Didáctica de la Matemática aún persiste de manera reiterada el fracaso de los estudiantes en Matemática independientemente del nivel, la Institución o el país donde se encuentren? Una de las aproximaciones que podrían dar luz sobre las posibles causas de este hecho se ubica en las relaciones e interacciones entre el docente y el estudiante. El profesor responsable de la formación matemática de sus estudiantes no puede limitarse a un papel pasivo frente al desempeño muchas veces deficiente de sus estudiantes. El profesor debe ir mucho más allá, profundizando en la comprensión de cómo ocurre el aprendizaje de sus estudiantes y el porqué de los tropiezos y fracasos de sus alumnos cuando se enfrentan a la actividad matemática; este conocimiento le puede brindar herramientas para ayudar a mejorar el desempeño de sus estudiantes. Como se ha mencionado previamente, las creencias y concepciones de los profesores afectan todo su ejercicio docente y de manera particular su comprensión de la naturaleza del error en el aprendizaje de la Matemática y sus posibles causas. Las creencias y concepciones de los profesores sobre el error en Matemática se centran en diversas ocasiones en explicaciones que toman distancia de los referentes teóricos y de investigación que ayudan a comprender sus causas. Sin embargo cuando algunos profesores⁶ se enfrentan a la posibilidad de reflexionar críticamente sobre las causas del error en Matemática tomando en consideración referentes teóricos y de investigación, muestran una cierta sensibilidad que denota posibilidades de cambio de sus concepciones frente a este aspecto del aprendizaje matemático.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 10(23), 241-286.

⁶ También existen *afortunadamente* casos en los cuales los profesores no están dispuestos a modificar sus concepciones.

- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.
- Bobis, J., Way, J., Anderson, J., & Martin, A. J. (2016). Challenging teacher beliefs about student engagement in mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(1), 33-55.
- Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. En Wanhamme, W., Wanhamme, J. (Eds.), *La problématique et l'enseignement des Mathématiques. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*, (pp. 101-117).
- Brousseau, G. (1983). Obstacles Epistémologiques en Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 4(2), 165-198.
- Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques. *Etudes dans le cadre de la théorie des Situations Didactique./Petix x*, (57), 5-30.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. México: Editorial Reverté.
- D'Amore B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*, 4, 557-583.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. *La matematica e la sua didattica*, 21(1), 87-92.
- D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2005). Analisi semántica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*, 2, 139-163.
- D'Amore, B., Fandiño, M., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2010). *Didattica della matematica. Alcuni effetti del "contratto"*. Bologna: Archetipolibri.
- D'Amore, B., Fandiño, M., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2010). *La didáctica y la dificultad en Matemática: análisis de situaciones con falta de aprendizaje*. Bogotá: Editorial Magisterio.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2005). Il portfolio di matematica. La matematica si fa in quattro. *Vita Scolastica*. 5, 10-12.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática: evaluar e intervenir en forma mirada y específica*. Bogotá: Editorial Magisterio.
- García, L., Azcárate, C., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), 85-116.
- Gagatsis, A., & Kyriakides, L. (2000). Teachers' attitudes towards their pupils' mathematical errors. *Educational Research and Evaluation*, 6(1), 24-58.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada.

- Golafshani, N. (2002). Teacher's conceptions of mathematics and their instructional practices. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 18, 1-14.
- Lerman, S. (1999). Research on mathematics teachers' beliefs: A situated perspective. *Introduction to the abstract book for the Oberwolfach meeting on belief research*, 3, 66-72.
- Liljedahl, P. (2010). Noticing rapid and profound mathematics teacher change. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(5), 411-423.
- Lloyd, G. M. (1999). Learning with and about mathematics curriculum: The role of teachers' conceptions. *Introduction to the abstract book for the Oberwolfach meeting on belief research* 3, 79-89.
- Moreno, M., & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de Matemática acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 21(2), 265-280.
- Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of educational research*, 62(3), 307-332.
- Pehkonen, E., & Pietilä, A. (2003). On relationships between beliefs and knowledge in Mathematics education. *European Research in Mathematics education III. Thematic Group*, 2, 1-8.
- Ramírez, H. (2013). *Tipología de errores y dificultades de aprendizaje de la Matemática de estudiantes de primer curso de Matemática. Análisis epistemológico, semiótico y didáctico*. (Tesis de Maestría). Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.
- Rojas, P. J. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: Representaciones semióticas y sentidos*. (Tesis de Doctorado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.
- Ruano, R., Socas, M. & Palarea, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, 2(2), 61-74.
- Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: a comparison between semiotic perspectives*. (Tesis de Doctorado). Università degli Studi di Palermo, Palermo, Italia.
- Sbaragli, S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica*. 1, 57-71
- Törner, G., Rolka, K., Rösken, B., & Sriraman, B. (2010). Understanding a teacher's actions in the classroom by applying Schoenfeld's theory teaching-in-context: Reflecting on goals and beliefs. En Sriraman, B., & English, Lyn. (Eds.), *Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers* (pp. 401-420). Berlin: Springer Berlin Heidelberg.