II CEMACYC
II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
REDUMATE ii.cemacyc.org
29 octubre al 1 noviembre. 2017
Cali, Colombia

La desigualdad triangular

Candelaria **González** Polo
Red de Investigadores Independientes en México [REDIIM]
México
canditapolo@gmail.com

Resumen

En un proyecto de investigación-acción con niños de segundo grado de Educación Básica, Primaria en México, se desarrolló una sesión de geometría con el propósito de que los niños identificaran la propiedad de la desigualdad triangular al advertir que en todo triángulo, la suma de sus longitudes de dos lados cualesquiera es siempre mayor a la longitud del lado restante y para la que se cumple que dado un triángulo de lados *a, b* y *c,* entonces $a+b \succ c$, $a+c \succ b$ y $b+c \succ a$. Esta sesión de resolución de problemas muestra cómo los niños aprenden nociones matemáticas por sí mismos a partir de sus saberes previos, además que se divierten y construyen de forma colectiva el conocimiento matemático.

Palabras clave: triángulo, desigualdad triangular, resolución de problemas, saberes previos.

Antecedentes

En un estudio exploratorio sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en México, con niños de 2º y 4º grado de Educación Básica Primaria, basado en algunas sugerencias del método japonés "*Estudio de Clases",* se detectó que los niños ejecutan correctamente las sumas y restas al resolver un problema, pero no van más allá de hallar el resultado para encontrar lo mágico que se puede producir con la matemática al descubrir patrones o regularidades, es decir, los niños muestran principalmente el dominio en la mecanización de algoritmos y la memorización de procesos.

El proceso de resolución de problemas en la enseñanza de la matemática en Educación Básica, Primaria en México, se limita solo al resultado, y a mantener a los estudiantes practicando el método enseñado, y el único criterio para divertirse con las matemáticas es la "respuesta correcta". Tal situación ha sido atendida por estudiosos en el área como Block D., Dávila M. y Martínez P. (1995) quienes revelan que los docentes centran su atención en la tarea de verificar el nivel de mecanización de los algoritmos de las operaciones, que en nuestra opinión, poco tienen que ver con procesos que permitan al estudiante comprender las propiedades de los objetos matemáticos; es decir, aprendan matemáticas.

De manera personal, suponemos que para lograr que los niños aprendan matemáticas por ellos mismos, depende de los propósitos, de las condiciones y del tipo de problemas que se manejan en el salón de clases. En ese sentido, el ejemplo reportado en este documento responde a la pregunta ¿qué estrategias permiten que los niños participen por ellos mismos con sus saberes previos y disfruten de sus propios procesos en la construcción colectiva del conocimiento matemático?

Para atender el supuesto y responder al cuestionamiento descrito en el párrafo anterior, se decidió trabajar la resolución de problemas abiertos con los niños en promedio de 7 años que cursan Educación Básica Primaria en México, con el propósito de suscitar en ellos aprender matemáticas a partir de los conocimientos previos, a pensar por sí mismos, y a la participación colectiva en la construcción de patrones y regularidades para disfrutar lo mágico que se puede producir con el conocimiento matemático.

La estrategia

En el campo educativo, autores como Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2010:180) coinciden en que una estrategia de aprendizaje "*es un procedimiento (conjunto de pasos o habilidades) y al mismo tiempo un instrumento psicológico que un alumno adquiere y emplea intencionalmente como recurso flexible, para aprender significativamente*". Este concepto también "*tiene que ver con las acciones intencionales que desarrolla el profesor para lograr que los estudiantes construyan cierto concepto matemático en situación escolar*" García-García, J., Rodríguez, F. M. y Navarro, C. (2015:218).

Por otro lado, Polya (1965) reporta que la investigación en educación matemática considera que el trabajo con problemas es imprescindible para que el individuo construya de manera significativa el conocimiento matemático. En el mismo sentido, un problema reúne componentes como tener varios, uno o ningún resultado final, lo cual deberá determinar la persona haciendo uso de alguna estrategia como lo mencionan (Cabañas, 2000 y Santos, 2010). Concluyendo en este rubro, García-García, J., Rodríguez, F. M. y Navarro, C. (2015: 220) consideran que la resolución de problemas "*alude a todo el procedimiento que lleva a cabo el estudiante para encontrar la respuesta a la situación que se le planta [...] importa además de qué responde el alumno, cómo lo hace porqué procede así*". Al respecto Lester (2013:251) menciona que la resolución de problemas es una actividad en la que se articulan una variedad de acciones cognitivas, cada una de las cuales necesita de ciertos conocimientos y habilidades, algunas de ellas no son rutinarias, como por ejemplo, coordinar experiencias previas, usar representaciones, patrones, emplear la intuición, entre otros.

La estrategia que en el caso de este estudio se utilizó en la construcción colectiva del conocimiento matemático fue trabajar con resolución de problemas abiertos. Es la estrategia que nos ha permitido asegurar el logro de ciertos resultados y no otros como acertadamente lo reportan estudiosos como Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2010).

Se define un problema abierto, aquel desafío que principalmente da origen a múltiples soluciones y a un entendimiento generalizado al comprender la idea matemáticamente. Este tipo de problemas no son rutinarios, sino como lo describe Santos (1992:18) son aquellos que cuentan con varios métodos de solución o que requieren para su solución, más que la simple aplicación de reglas, fórmulas o algoritmos. La intención de trabajar este tipo de resolución de problemas con múltiples soluciones, es favorecer la participación de cada uno de los niños en su solución, facilitar un desarrollo matemático por ellos mismos y no hacer tareas individuales distintas y separadas, sino enfrentar desafíos divertidos para la construcción colectiva del conocimiento matemático.

Se trata además de que los niños junto con sus amigos y profesores aprendan a obtener conocimientos matemáticos simultáneamente desde lo que ya se ha aprendido y construir escenarios heurísticos y más naturales de aprendizaje. Lester (2013:268) significa a la heurística como un aspecto que permite a los estudiantes enfrentar y resolver un problema matemático. Se refiere a las estrategias que usan los estudiantes y manifiestan de manera autónoma, como formular métodos, reglas, así como inventar procedimientos como ensayo y error, búsqueda de patrón, resolver un problema más simple, hacer un diagrama, resolver un problema equivalente, hacer una tabla de valores, entre otros.

A partir de los resultados del estudio exploratorio descrito y de los reportes de investigación, se diseñó un proyecto para la enseñanza y aprendizaje de la matemática en Educación Básica, Primaria, bajo la forma de investigación acción con características propuestas por Elliott (2005), para reflexionar sobre la propia práctica y a la vez impulsar el desarrollo profesional de los docentes con procesos de enseñanza que promuevan el aprendizaje para la comprensión.

Metodología

Elliot (2005:4) define la investigación-acción como "*reflexión relacionada con el diagnóstico*". Consideramos que representa una buena forma metodológica para entender los procesos educativos y sociales que se desarrollan en el aula o en la vida diaria, y atenderlos. Ese entendimiento se logra según Elliot porque se analizan las acciones humanas y las situaciones sociales experimentadas por los profesores porque "*se relaciona con problemas prácticos cotidianos experimentados por los profesores en vez de con los problemas teóricos definidos por los investigadores puros en el entorno de una disciplina del saber*" (Elliot, 2005:5). Esta forma de hacer investigación puede ser desarrollada por los mismos profesores o por alguien a quien ellos se lo encarguen; adopta una postura exploratoria al explicar lo que sucede de forma narrativa; interpreta lo que ocurre en guiones a veces denominados estudios de caso; utiliza como herramientas para hacer tangibles los significados subjetivos a la observación participante y la entrevista, y en esta experiencia, también fueron útiles la guía de observación, las producciones de los niños en sus notas y sus explicaciones orales, lo plasmado en el pizarrón y las fotografías; y admite que la situación sea descrita y explicada con el mismo lenguaje utilizado por los implicados en el proceso.

Empleando la metodología descrita, se abordó el problema de la desigualdad triangular con un grupo de 23 estudiantes de segundo grado de Educación Básica, Primaria en México. Se fortaleció la metodología con algunas sugerencias de las tres de las etapas del método japonés "*Estudio de Clases*": la planificación, la puesta en práctica y la evaluación de la clase. Método que Japón comparte con países en vías de desarrollo para "ampliar y enriquecer la cooperación hacía la educación básica" (Instituto para la Cooperación Internacional. Agencia de Cooperación Internacional del Japón [JICA], 2005). En la primera etapa se consideraron entre otros aspectos, los propósitos y la forma de presentación del contenido; se desarrolló un plan de clase donde se especificó el inicio, desarrollo y cierre del mismo, para alcanzar los propósitos planteados. En la segunda etapa, se puso en práctica el plan de clase y la inclusión de 3 observadores, y en la tercera etapa se realizó la evaluación de lo acontecido durante la clase, proceso que se desarrolló inmediatamente después de haber concluido la misma. Durante esta fase, en plenaria, el maestro que condujo la sesión, expuso su experiencia, las dificultades y fortalezas vividas durante la clase en función a los propósitos, los contenidos y los resultados de aprendizaje esperados. Posteriormente los 3 observadores invitados, participaron con los resultados de su observación plasmada en la guía de observación previamente diseñada, para reflexionar entre otros aspectos, sobre los aprendizajes logrados por los niños durante la clase.

En la forma de presentación del problema, se utilizaron procesos inductivos para propiciar razonamientos con infinidad de valores propuestos. Para esta forma, se construyó un problema con múltiples soluciones derivado de la propiedad de la desigualdad triangular. Se planteó un propósito y se planeó la clase en tres etapas: inicio, desarrollo y cierre. En la etapa de inicio se propone a los niños la resolución de un problema para que cada uno proporcione de manera empírica y a partir de sus saberes previos, algunas respuestas al mismo. En la etapa de desarrollo, se planeó, invitar a los niños a resolver el problema con diferentes variantes y se propone una tabla para organizar en el pizarrón las posibles respuestas de los niños y permitir a partir de la información la identificación de patrones o regularidades; y en la etapa de cierre, se plantean variantes del problema para retroalimentar los aprendizajes logrados.

Desarrollo de la experiencia

Se abordó el plan "Un triángulo desigual". El propósito consistió en identificar que en todo triángulo, la suma de sus longitudes de dos lados cualesquiera es siempre mayor a la longitud del lado restante y en el que se cumple que dado un triángulo cuyos lados son *a, b,* y *c,* entonces $a+b \succ c$, $a+c \succ b$ y $b+c \succ a$. La visión prospectiva despliega la idea de que los estudiantes desarrollen maneras de pensar que les permitan formular conjeturas y procedimientos para resolver problemas, así como elaborar explicaciones para ciertos hechos numéricos o geométricos.

De acuerdo al plan y programa de estudios de Educación Básica, Primaria en México (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2011), el estudio de los triángulos para segundo grado, está ubicado en el tema de forma, espacio y medida con el propósito de identificar y describir las características de figuras por el número y la forma de sus lados. Y como aprendizajes esperados de estos temas se sugiere identificar las características de figuras planas, simples y compuestas.

En la etapa de inicio de la clase se solicitó a los niños cortar un popote de 20 cm de longitud, en tres trozos de cualquier medida y formar un triángulo al unir los extremos de cada uno. Algunos de ellos, partieron el popote completo en tres trozos, otros cortaron tres trozos del popote y dejaron un sobrante, y unos cuantos usaron más de tres popotes para formar el triángulo. Los niños procedieron a formar lo solicitado y el 100% mostró la noción de triángulo como la figura formada por tres lados. Dos de ellos evidenciaron sorprendidos que no fue posible formar un triángulo con las tres longitudes que cortaron. Un docente observador escribió: "*algunos niños se sorprendieron que las medidas no se podían formar los triángulos*"[1]. Uno de los estudiantes eliminó su "desatino" desechando al cesto de la basura sus cortes. El otro trató de forzar los segmentos para cerrar la figura al unir los extremos de los tres lados, finalmente unió uno de los extremos de los lados más pequeños y usó el lado más grande como base donde descansaron, en dos de sus puntos, cada uno de los extremos de los lados más pequeños, así formó un triángulo como se muestra en la *Figura 1*.

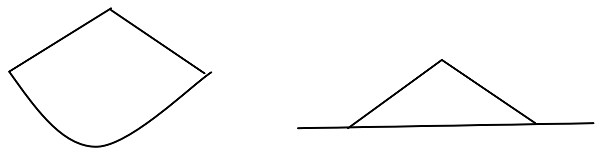

Figura 1. Intentos usados por uno de los niños para formar un triángulo cuya suma de dos de sus lados es menor que la medida del tercero.

Este momento fue oportuno para comentar al grupo que cualquiera de las propuestas resulta muy interesante y necesaria para hallar "el truco" buscado. En el estudio de Education Committee of the EMS (2012:2), se concluye que los estudiantes asumen sin cuestionar que todas las tareas que propone el profesor tienen solución. Más aún, admiten que sería muy extraño que un ejercicio no tuviese respuesta o que condujera a una respuesta inconsistente, por ello, cuando a los estudiantes se les enfrenta a problemas no-estándar pueden manifestar confusión y contradicciones al tratar de buscar la respuesta directa al planteamiento. En otro estudio, Castañeda, A., Hernández-Morales, J. A., & González-Polo, R. I. (2016:119) reportaron que "*varios estudiantes forzaban los trozos de papel para formar un triángulo, pues la consigna de la actividad era construir los triángulos y los estudiantes no admitieron como posibilidad que el profesor les hubiera asignado una tarea que no se podría resolver".*

Para recuperar la confianza y provocar la reflexión en los niños, en la etapa de desarrollo, se hizo una tabla de tres columnas en el pizarrón como se muestra en la *Figura 2*. Se solicitó a los niños midieran los dos lados más pequeños de su popote y sumaran las medidas. En seguida se solicitó midieran el tercer lado. Cada respuesta de los niños se consideró y se anotó en la tabla. Si los datos coincidían con algún ejemplo previamente planteado se mostraba al niño que su propuesta ya estaba incluida. De esta forma se tomó en cuenta la participación del 100% de los niños en la construcción del conocimiento matemático.

En la primera columna de la tabla, se anotó la medida de los dos lados más pequeños y la suma de los mismos. En la segunda columna se registró la medida del tercer lado. Cada niño que proporcionó la información expresó si fue posible formar un triángulo al unir los extremos de sus tres longitudes y su respuesta se anotó en la tercera columna de la tabla. Para este proceso los niños usaron la escuadra y mostraron habilidad en la obtención de la medida de las diferentes longitudes. Asimismo, el 100% de los niños reportó la suma correcta de las medidas de sus dos longitudes más pequeñas.

[1] Las referencias empíricas descritas en este documento fueron rescatadas en las notas de los observadores durante la clase "Un triángulo desigual", el 12 de mayo de 2016.

Se analizaron los datos de la tabla de manera grupal y una conclusión a la que los niños llegaron según un docente observador fue que había una regularidad, que existía estrecha relación de los datos de las tres columnas y que *"no siempre se forman triángulos con diferentes medidas de los lados"*. Es decir, cuando la suma de las longitudes de los lados de la columna uno fue menor que la longitud del tercer lado expresado en la columna dos, no fue posible formar un triángulo. Por el contrario, si la suma de las longitudes del lado uno y el lado dos fue mayor a la longitud del lado tres, si fue posible formar un triángulo. Esta forma de organizar la información proporcionada por los niños nos dio un primer acercamiento al teorema de la desigualdad triangular.

Se desprendió de la información de la tabla el caso donde uno de los niños reportó que era posible formar un triángulo con longitudes de sus lados 5, 5 y 10 unidades. Se expuso la situación al grupo, los niños experimentaron con el ejemplo y evidenciaron que si se unían las longitudes en sus extremos no era posible formar un triángulo. En otro estudio se ha reportado que "*la elaboración de la conjetura (errónea) de un grupo de alumnos teniendo en cuenta la relación entre los lados fue crucial para la formulación de la propiedad*" (Porras, 2013:12). Con este ejemplo se concluyó que si la suma de dos de las longitudes de un triángulo es igual a la medida de la tercera, no era posible formar un triángulo. Del mismo modo, en Castañeda, A., Hernández-Morales, J. A., & González-Polo, R. I. (2016:115) se reporta que "*los estudiantes concluyeron que para formar un triángulo se deben tener en cuenta ciertas condiciones en las medidas de los segmentos"*.

Figura 2. Tabla donde se organizaron las propuestas de los niños.

Teóricamente, la desigualdad triangular o desigualdad de Minkiwski es un teorema de geometría euclidiana que establece: "*la suma de las longitudes de cualquier dos lados de un triángulo es mayor que la longitud del lado restante"* Weisstein (2016). Así que para formar un triángulo con lados *x, y, z* se cumple que: $z \prec x+y$, $x \prec z+y$, y $y \prec x+y$.

Para fortalecer la noción intuitiva del teorema de la desigualdad triangular, en el cierre de la sesión, el profesor cuestionó si era posible formar un triángulo con longitudes de 2, 2 y 20 unidades. Los niños expresaron que no porque "*un popote está más grande"*. Preguntó nuevamente el profesor si con longitudes de 5, 5 y 5 se puede formar un triángulo y los niños contestaron que sí. Un ejemplo más fue solicitar si con las longitudes 1, 10 y 3 se podía formar un triángulo y los niños indicaron que no porque *"los otros dos son más chiquitos y uno más grande"*, y se finalizó con un ejemplo de longitudes 80, 100 y 100, ante el cual los niños indicaron que si es posible formar un triángulo. De manera empírica los niños mostraron que efectivamente si la longitud de uno de los lados de un triángulo es mayor que la suma de los otros dos o que si la suma de las longitudes de dos de los lados es el doble de la longitud del tercero, entonces no es posible formar un triángulo. Con esto confirmamos al igual que Sadovsky (2005), que los problemas abiertos, aquellos que entre otras cosas generan incertidumbre, dejan una huella en los estudiantes porque conducen al desarrollo de una idea.

Algunas conclusiones

La estrategia que en el caso de este estudio se utilizó para permitir que el 100% de los estudiantes participara en la construcción colectiva del conocimiento matemático fue trabajar con resolución de un problema abierto. La experiencia que describimos en este documento nos refleja las bondades de aprender matemáticas a partir de este tipo de desafíos que pueden tener múltiples representaciones y que llevan a los niños a desarrollar su autonomía para aprender matemáticas por sí mismos cuando producen sus propias explicaciones y aprendan nociones matemáticas con la ayuda de los otros en una dinámica de compartir con los amigos y el grupo.

La diversidad de ejemplos construidos por los niños que son ricas ideas matemáticas, favorecieron trabajar con múltiples representaciones y originaron un ambiente favorable para reflexionar sobre la propiedad de la desigualdad triangular. Estas ideas se organizaron en una tabla de tres columnas que se dibujó en el pizarrón y en función de ellas, los niños daban a conocer sus razones para construir colectivamente el contenido matemático.

Los procesos inductivos utilizados en la resolución del problema permitieron a los niños identificar regularidades y a desarrollar nociones intuitivas de la propiedad de la desigualdad triangular. A través de estos procesos, los contenidos matemáticos fueron surgiendo de los saberes expresados por los niños.

Las nociones claras de la suma, habilidad en la medición de longitudes, la noción de triángulo como la figura formada por tres lados, fueron parte de los saberes previos que usaron los niños para acercarse a la noción de la propiedad de la desigualdad triangular.

Se llegó de forma intuitiva a la conclusión de que si la longitud de uno de los lados de un triángulo es mayor que la suma de los otros dos o que si la suma de las longitudes de dos de los lados es el doble de la longitud del tercero, entonces no es posible formar un triángulo, en otras palabas, un triángulo existe y se puede construir si los segmentos utilizados cumplen con la condición de que la suma de cualquiera de dos de ellos es siempre mayor que el restante.

Referencias y bibliografía

Block, D., Dávila, M. & Martínez, P. (1995). Resolución de problemas: una experiencia de formación de maestros. *Educación Matemática,* DIE-CINVESTAV-IPN: Editorial Iberoamérica, 7(3), 5-26.

Cabañas, M. G. (2000). Los problemas… ¿cómo enseño a resolverlos? Distrito Federal, México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Castañeda, A., Hernández-Morales, J. A., & González-Polo, R. I. (2016). Ruptura del contrato didáctico en la solución de un problema de geometría con estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, 28(1), 99-123.

Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: Una interpretación constructivista.* Distrito Federal, México: Editorial Mc Graw Hill.

Education Committee of the EMS. (2012). What are the Reciprocal Expectations between Teacher and Students? Solid Findings in Mathematics Education on Didactical Contract. *Newsletter of the European Mathematical Society*, 84, 53-55.

Elliot, J. (2005). *La investigación acción en educación.* Quinta edición. Madrid: Edición Morata, S. L.

García-García, J., Rodríguez, F. M. y Navarro, C. (2015). Las estrategias utilizadas por los niños Tee Savi en la resolución de problemas aritméticos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime*, 18(2), 213-244.

Instituto para la Cooperación Internacional. Agencia de Cooperación Internacional del Japón [JICA]. (2005). *La historia del desarrollo de la educación en Japón. Qué implicaciones pueden extraerse para los países en vía de desarrollo.* Tokio: Shinjuku-ku.

Lester, F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem solving instruction. *The Mathematics Enthusiast*, 10 (1 y 2), 245-278.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México DC, México: Trillas.

Porras, M. (2013). La geometría del plano en la escolaridad obligatoria. Análisis de una clase. En *Cuadernos de Educación*, Año XI, (11). Argentina: Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad Nacional del Comahue.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal

Santos, L. M. (1992). Resolución de Problemas; El Trabajo de Alan Schoenfeld: Una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas. *Educación Matemática*. 4 (2), 16-24.

Santos, L. M. (2010). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. Distrito Federal, México: Editorial trillas.

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2011). *Programas de Estudio 2011. Guía para el maestro. Educación básica primaria. Segundo grado.* Primera ed. 2012. México, D.F.

Weisstein, E. W. (2016). *Triangle Inequality*. Consultado el 02 de octubre de 2016. Recuperado de http://mathworld.wolfram.com/TriangleInequality.html