



# II CEMACYC

II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

29 octubre al 1 noviembre. 2017

Cali, Colombia

[ii.cemacyc.org](http://ii.cemacyc.org)



## El estudio de la simetría en la formación inicial de docentes

Alba Rosa **González**

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

Honduras

[alba62@upnfm.edu.hn](mailto:alba62@upnfm.edu.hn)

Libni Berenice **Castellón**

Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán

Honduras

[lcastellon@upnfm.edu.hn](mailto:lcastellon@upnfm.edu.hn)

### Resumen

En la enseñanza aprendizaje de las matemáticas ha tomado gran importancia la comprensión de los conceptos matemáticos y la aplicación de los mismos en diferentes áreas con el fin de facilitar su estudio. En este taller se pretende desarrollar actividades relacionadas con las transformaciones geométricas, tanto en un ambiente geométrico como algebraico con el fin de mostrar la secuencia curricular y la aplicación del contenido en diferentes niveles. Los participantes trabajaran con material concreto construyendo intuitivamente los diferentes tipos de simetría para luego expandir su aplicación en el plano cartesiano como estrategia para la construcción de gráficas de funciones.

*Palabras clave: Transformaciones geométricas, simetría, gráfica de funciones, formación inicial, álgebra, geometría.*

### Introducción

En la enseñanza aprendizaje de las matemáticas ha tomado gran importancia la comprensión de los conceptos matemáticos y la aplicación de los mismos en diferentes áreas con el fin de facilitar su estudio. En este taller se pretende desarrollar actividades relacionadas con las transformaciones geométricas, tanto en un ambiente geométrico como algebraico con el fin de mostrar la secuencia curricular y la aplicación del contenido en diferentes niveles. Los participantes trabajarán con material concreto construyendo intuitivamente los diferentes tipos de simetría para luego expandir su aplicación en el plano cartesiano como estrategia para la construcción de gráficas de funciones.

### Síntesis del taller

La formación inicial de docentes comprende tanto la formación científica (matemática) como didáctica. En la Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán (UPNFM) de Honduras, la formación en enseñanza de la matemática de los futuros docentes contempla el estudio del currículo de matemáticas en los diferentes niveles, metodologías de enseñanza (con énfasis en resolución de problemas), estrategias de enseñanza y desarrollo de clases simuladas. Las clases se desarrollan a través de talleres relacionados con las diferentes áreas de estudio de la matemática en los que el estudiante conoce la secuencia curricular de un contenido al mismo tiempo que realiza actividades que cuestionan su conocimiento matemático y pedagógico.

Los Talleres, en el campo de la educación se refieren a una metodología de enseñanza que combina la teoría y la práctica. Con los futuros docentes, los talleres son sesiones de dos o cuatro horas, planificados, desarrollados y evaluados por un especialista en matemática educativa. Se abordan y se relacionan diferentes temas: conocimiento científico de la matemática, metodología de enseñanza, y elaboración y uso de material didáctico. Para cada taller, el profesor define los objetivos, diseña actividades que involucren la participación activa de los estudiantes, utiliza material especializado acorde con los objetivos y que contribuya a desarrollar, entender y profundizar en la parte práctica de la temática. Busca dar una solución práctica a una necesidad sentida de los estudiantes. En este caso en particular, los talleres se desarrollan con el propósito que el futuro docente experimente el uso de la metodología de resolución de problemas y pueda aplicarla de manera exitosa con sus estudiantes en el aula de clases en diferentes temas de matemática.

Las transformaciones geométricas poseen un lugar importante en el currículo de matemáticas, estando presentes desde los primeros grados en los que los estudiantes exploran conceptos relacionados con simetría, homotecia, congruencia (de manera intuitiva en algunos casos). Posteriormente estos conceptos son trasladados a un ambiente algebraico en el que la construcción de gráficas se auxilia de los conocimientos adquiridos en geometría para desarrollar transformaciones en el plano cartesiano.

El propósito de este taller es establecer conexiones entre la geometría y el álgebra a través del desarrollo de actividades donde los participantes explorarán el concepto de simetría y sus aplicaciones tanto en el estudio de la geometría como el de álgebra. Conocerán la simetría reflexiva y rotacional y luego aplicarán estos conceptos para la construcción de gráficas en el plano cartesiano.

En una primera etapa de este taller se tiene como propósito realizar actividades que permitan construir y comprender el concepto de simetría reflexiva y rotacional; actividades que pueden ser desarrolladas con estudiantes de 3er a 6to grado de educación básica, los participantes en el taller trabajarán con material concreto para construir el concepto de simetría (simetría reflexiva y rotacional), establecerán las características de cada tipo de simetría, realizarán construcciones y utilizarán juegos que les permitirán aplicar el concepto de simetría. En la etapa final de este taller los participantes trasladarán las ideas alrededor del concepto de simetría construidas en un ambiente geométrico a un ambiente algebraico; identificarán los cambios de las coordenadas de los vértices de una figura al aplicar la simetría reflexiva y rotacional con el fin de generalizar el valor de las coordenadas. Finalmente emplearán la simetría como una técnica para graficar funciones y determinar su paridad. Dichas actividades pueden ser aplicadas

en cursos iniciales de álgebra en los que los estudiantes comienzan el estudio de las funciones y sus gráficas.

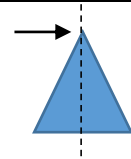
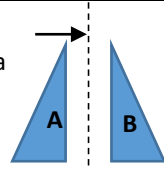
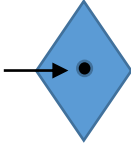
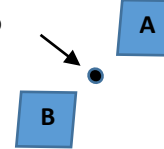
### Simetría en el currículo nacional básico de matemáticas

El estudio de la geometría es de suma importancia en la enseñanza de la matemática y particularmente en el Currículo Nacional Básico de Honduras (CNB) y los libros de texto oficiales en los cuales se propone la enseñanza de la geometría desde el primer grado, iniciando con el estudio de las figuras geométricas y sus características para luego estudiar algunas transformaciones geométricas que en el pasado eran contempladas únicamente a nivel universitario. Satisfactoriamente, estos agregados han permitido establecer una secuencia curricular bien fundamentada en la que es posible profundizar en los contenidos y llevar la geometría al nivel demostrativo. Así mismo se han establecido conexiones entre los diferentes bloques de la matemática: números y operaciones, geometría, medidas, álgebra y estadística.

La Tabla 1 resume los tipos de simetría que son estudiados en el I y II ciclo de la educación básica (1ro-6to grado). Mismos que posteriormente en el bachillerato (10mo – 12vo grado) y cursos iniciales de álgebra universitaria y geometría son utilizados y demostrados.

Tabla 1

*Tipos de simetría en el I y II ciclo de la educación básica*

Ejemplo	Tipo de simetría	Acción que la produce	Descripción	Grado
Eje de simetría 	Simetría reflexiva (axial)	Reflexión	Esta figura es simétrica con respecto a un eje de simetría. Esta figura tiene <b>simetría reflexiva</b> .	3ro
Eje de simetría 			Estas figuras son simétricas entre sí con respecto a un eje de simetría. La figura A es simétrica a la figura B con respecto a un eje de simetría. Estas figuras tienen <b>simetría reflexiva entre sí</b> .	6to
Centro de simetría 	Simetría rotacional (central)	Rotación	Esta figura es simétrica con respecto a un centro de simetría. Esta figura tiene <b>simetría rotacional</b> .	6to
Centro 			Estas figuras son simétricas entre sí con respecto a un punto. La figura A es simétrica a la figura B con respecto a un punto. Estas figuras tienen <b>simetría rotacional entre sí</b> .	6to

Fuente: Matemáticas. Guía para maestros 3er grado (2016)

En este taller se desarrollarán actividades donde los participantes deberán identificar el eje de simetría de figuras dadas, completar figuras a través de la aplicación de la simetría reflexiva,

para lo que podrán usar recortes de las figuras, aplicar dobleces, usar cuadrícula. También deberán aplicar la simetría rotacional a figuras dadas y utilizar recortes de figuras para determinar si estas tienen simetría rotacional.

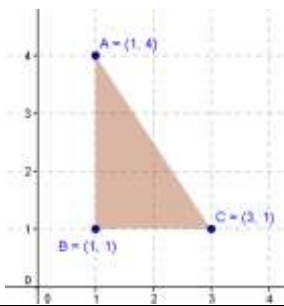
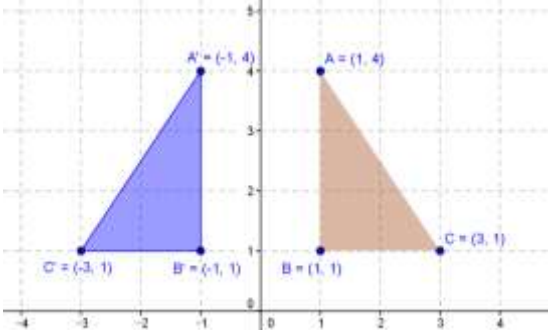
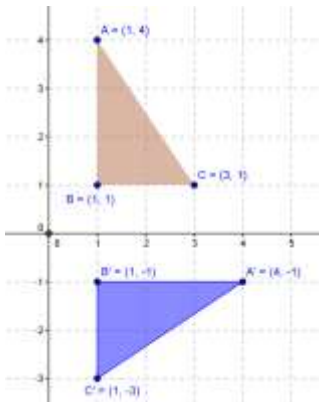
### Simetría en la formación del profesorado en matemáticas

El estudio de las transformaciones geométricas, en el profesorado de matemáticas en Honduras tiene fines demostrativos y de generalización. Estas se abordan dentro de la temática de los cursos de geometría y de manera implícita en cursos de álgebra, trigonometría, tecnología y tópicos en matemáticas, en los que los estudiantes aplican las transformaciones a otros objetos. Para este taller el interés radica en la aplicación de las transformaciones geométricas, particularmente simetría para la construcción de gráficas, sin embargo se propone iniciar con la transformación de figuras geométricas en el plano para deducir los cambios en coordenadas que estas provocan para luego expandir las ideas al estudio de las funciones.

La Tabla 2 es un ejemplo que muestra los cambios en las coordenadas de los vértices de un triángulo cuando se aplican los diferentes tipos de simetría y la forma en que se espera que los participantes del taller generalicen estas transformaciones. Se tratarán únicamente la simetría a través de los ejes  $x$  e  $y$  y la rotación tomando como centro el origen; estas transformaciones son las que se aplicarán posteriormente para facilitar la gráfica de funciones y determinar su paridad.

Tabla 2

#### Ejemplo de simetría reflexiva y rotacional en el plano cartesiano

<p>Figura original</p> 	
<p><b>Simetría reflexiva</b> con respecto al eje <math>y</math></p> 	<p><b>Simetría rotacional</b>, centro en el origen y giro de <math>90^\circ</math> en dirección de las manecillas del reloj.</p> 
<p>Las nuevas coordenadas de los vértices son:</p> <p><math>A'(-1, 4)</math>  <math>B'(-1, 1)</math>  <math>C'(-3, 1)</math></p>	<p>En general, la reflexión a través del eje <math>y</math> provoca los siguientes cambios:</p> <p><math>A'(-x, y)</math>  <math>B'(-x, y)</math>  <math>C'(-x, y)</math></p>
<p>Las nuevas coordenadas de los vértices son:</p>	<p>En general, la rotación de <math>90^\circ</math> con centro en el origen</p>

	<p>A'(4, -1) B'(1, -1) C'(1, -3)</p>	<p>provoca los siguientes cambios: A'(y, -x) B'(y, -x) C'(y, -x)</p>
<p>La rotación se repetirá una vez más para la misma figura con el fin de confirmar la regla obtenida.</p>		

Fuente: construcción propia

De manera similar se explorará la simetría a través del eje  $x$  y la rotación de  $180^\circ$  y  $270^\circ$ .

### Construcción de gráficas de funciones

Finalmente se utilizarán las generalizaciones encontradas anteriormente como estrategia para la construcción de gráficas de funciones. Las pruebas de simetría usualmente empleadas son de carácter algebraico, sin embargo se logra una mejor comprensión cuando éstas son vistas gráficamente. Se desarrollarán actividades que permitan a los participantes deducir las reglas de cada tipo de simetría y las pruebas tanto gráficas como algebraicas.

Una de las actividades que se desarrollarán consiste en que dados varios puntos en el plano cartesiano (puntos que corresponden a una función) se obtengan los puntos simétricos a estos, esto con el fin de identificar las características de las coordenadas de cada punto y su reflexión. Y luego al unir cada grupo de puntos, los originales y su reflexión, obtener la gráfica de una función y su inversa. Esta actividad puede ser usada para introducir la inversa de una función, definida como la reflexión de una función a través de la recta  $y=x$ , siempre que está sea biunívoca en todo su intervalo o en un intervalo restringido.

Esto es posible ya que el Teorema sobre funciones inversas indica que “la gráfica de una función  $f$  y la gráfica de su inversa  $f^{-1}$  son simétricas con respecto a la recta  $y = x$ .” (p.405; Sullivan, 2006). En la Figura 1 se ilustra este resultado. Observe que, una vez que se conoce la gráfica de  $f$  la gráfica de  $f^{-1}$  se obtiene reflejando la gráfica de  $f$  con respecto a la recta  $y = x$ .

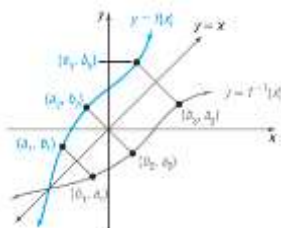


Figura 1. Gráfica de una función y su inversa (p. 405; Sullivan, 2006).

Se abordará la simetría de funciones con respecto al eje  $x$ , eje  $y$  y el origen, esto con el fin de asociar cada tipo de simetría con las características propias de las funciones. Algebraicamente, para probar la simetría de la gráfica de una ecuación respecto al eje  $x$ : se debe probar que para todo punto  $(x, y)$  en la gráfica, el punto  $(x, -y)$  también está en la gráfica. Esto se puede probar sustituyendo  $y$  por  $-y$  en la ecuación o determinando las distancias entre puntos correspondientes de la gráfica y el eje de simetría. De igual forma existen reglas para probar la simetría con respecto al eje  $y$  y al origen; se considerará la simetría respecto al origen de dos formas: (1) como una reflexión respecto al eje  $y$ , seguida de una reflexión respecto al eje  $x$ . (2) Como una proyección a lo largo de una recta que pasa por el origen de manera que las distancias desde el origen son iguales.

El estudio de este tipo de simetría en funciones tanto polinómicas como trigonométricas permitirá introducir la definición de función par e impar y hacer uso de esta característica para obtener gráficas más precisas de funciones dadas. Para ello se aplicará el teorema “Una función es par si y sólo si su gráfica es simétrica respecto al eje  $y$ . Una función es impar si y sólo si su gráfica es simétrica respecto al origen” (p.241; Sullivan, 2006).

### **Relación entre el álgebra y la geometría**

El desarrollo histórico de la matemática muestra como los matemáticos hacían uso de representaciones para comprender los objetos matemáticos y facilitar los cálculos. Uno de los matemáticos más destacados de la historia que brindó aportes significativos al álgebra es Al-Khwarizmi, quien en su tratado de álgebra presenta estrategias para reducir la cantidad de cálculos necesarios para resolver ecuaciones de segundo grado a través del uso de figuras geométricas (Boyer, 1992). El uso de cuadrados, rectángulos y cubos ha sido retomado en la actualidad para representar términos algebraicos y facilitar la comprensión de las operaciones de polinomios, productos notables y factorización.

Godino y Font (2003) presentan el álgebra más allá de la generalización de la aritmética como una herramienta de modelización, mostrando la importancia del desarrollo del pensamiento algebraico desde edades tempranas en las que los estudiantes identifican patrones (numéricos, geométricos, entre otros), estudian de manera intuitiva las funciones y se van auxiliando del uso de símbolos para analizar diversas situaciones. A medida que los estudiantes van construyendo un razonamiento algebraico esto les permite identificar objetos matemáticos a través de símbolos, esto incluye áreas, perímetro, longitudes de las figuras, etc.

Es aquí donde esta conexión entre geometría y álgebra permite representar figuras geométricas en el plano cartesiano y encontrar una regla que determine los efectos que diversas transformaciones geométricas tienen sobre ellas y las coordenadas de sus puntos. Estas transformaciones también son aplicadas a funciones y permiten determinar con mayor facilidad su gráfica. La actividad a desarrollar en este taller consiste en estudiar la simetría reflexiva y rotacional en figuras geométricas que posteriormente serán trasladadas al plano cartesiano para generalizar sus efectos y aplicarlos en la construcción de gráficas de funciones.

### **Bibliografía**

- Boyer, C. (1992) Historia de la matemática. Alianza Universidad
- Godino, J. y Font, V. (2003) Razonamiento algebraico para maestros. Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros/>
- Secretaría de Educación de Honduras. (2016). Cuaderno de trabajo para estudiantes de primero a noveno grado en matemática.
- Secretaría de Educación de Honduras. (2016). Guías para maestros de primero a noveno grado en matemática.
- Sullivan (2006) Álgebra y Trigonometría. 7ma edición. Pearson
- Zill & Dewar (2000). Álgebra y Trigonometría. 2da edición. McGraw-Hill