II CEMACYC
II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
29 octubre al 1 noviembre. 2017
Cali, Colombia
REDUMATE ii.cemacyc.org

Propuesta taxonómica para el estudio del sentido numérico

Omar **Hernández** Rodríguez
Facultad de Educación, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
omar.hernandez4@upr.edu
Jorge M. **López** Fernández
Departamento de Matemáticas, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
jorgemar.lopez@gmail.com
Ana Helvia **Quintero** Rivera
Departamento de Matemáticas, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
aquinter_2000@yahoo.com
Aileen **Velázquez** Estrella
Escuela Carmen D. Ortiz de Aguas Buenas
Puerto Rico
aileen.velazquez@gmail.com

Resumen

El estudio del sentido del número debe extenderse para que, por una parte, se formalice en todo el ciclo escolar y, por la otra, incluya mucho más que los números, sus relaciones y operaciones. Es imprescindible que los estudiantes, al final de sus estudios escolares, estén totalmente preparados para emprender cursos de matemáticas a nivel universitario. Esto implica que, en su formación, desarrollen modelos mentales robustos para trabajar los aspectos tradicionales del sentido numérico y que también incluya las dimensiones algebraica, variacional y probabilística de los números. En este taller presentaremos ejemplos de una taxonomía que los maestros pueden utilizar para el desarrollo de habilidades de sentido numérico y de la que los investigadores pueden valerse para construir la base teórica para sus estudios.

Palabras Clave: Sentido numérico, números reales, numeración, didáctica de los números, pensamiento numérico

Antecedentes

En febrero de 1989, la Fundación Nacional de Ciencia (NSF por sus iniciales en inglés) patrocinó una conferencia para tratar el tema general de *Establecer los Fundamentos para la Investigación sobre Sentido Numérico y Temas Relacionados*. Los debates se centraron en dos ejes temáticos: (1) definir lo que es sentido numérico y determinar cómo se debe enseñar y evaluar; y, (2) determinar los fundamentos y la agenda para la investigación sobre el sentido numérico. Los participantes, en su mayoría investigadores de psicología y expertos de educación matemática, no pudieron resolver ninguno de estos temas (Sowder & Schapelle, 1989).

Nuestro primer intento de medir el sentido numérico

La preocupación que enfocó nuestra atención hacia el sentido numérico se originó de un esfuerzo de determinar las habilidades numéricas de los estudiantes de la Facultad de Ciencias Naturales de la Universidad de Puerto Rico, Río Piedras (UPRRP), ya que se pensaba que estaban relacionadas con el desempeño de los estudiantes en el curso de Precálculo[1]. Cabe mencionar que Precálculo es el curso inicial para los estudiantes de la Facultad de Ciencias Naturales de la UPRRP y muestra consistentemente altos niveles de fracaso[2], a pesar de que son los más capacitados y competentes matemáticamente de toda la Universidad de Puerto Rico.

Con esto en mente, desarrollamos una prueba que, además de determinar algunas aspectos sociodemográficos de los participantes, contenía 20 preguntas de opción múltiple con el objetivo establecer el sentido numérico de los estudiantes. En los resultados no encontramos diferencias significativas en el desempeño de los estudiantes de los diferentes grupos identificados por las variables sociodemográficas. A continuación, presentamos la cantidad de estudiantes que seleccionaron cada una de las opciones de tres de las preguntas.

Pregunta Número 1 (P1)

Si x y y son números reales positivos tales que $0 < y < x$, entonces

a. $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$
b. $\frac{1}{x} < \frac{1}{y}$
c. $\frac{1}{x} < -\frac{1}{y}$
d. $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} < \frac{1}{1+\frac{1}{y}}$

Estadísticas P1

a	65	41%
b	71	45%
c	9	6%
d	5	3%
N/A	9	6%
N	159	

Pregunta Número 2 (P2)

Supongamos que $\frac{x}{17} = \frac{37}{y} = \frac{1}{5}$. ¿Cuál de las siguientes es falsa?

a. $\frac{37x}{17y} = \frac{1}{5}$
b. $\frac{37+x}{17+y} = \frac{1}{5}$
c. $\frac{x-37}{17-y} = \frac{1}{5}$
d. $\frac{2x+37}{y+34} = \frac{1}{5}$

Estadísticas P2

a	26	16%
b	17	11%
c	31	19%
d	58	36%
N/A	27	17%
N	159	

Pregunta Número 3 (P3)

Si $\mu = \frac{1}{5}$, ¿Cuál de las siguientes es falsa?

Estadísticas P3

[1] El curso es tomado por cerca del 90% de los estudiantes admitidos a la Facultad de Ciencias Naturales.
[2] Cerca del 65% de los estudiantes fracasan o abandonan (oficialmente o no) el curso.

a. $\mu = 0.333\ldots$
b. $\mu = 0.666\ldots - 0.333\ldots$
c. $\mu = 0.32999\ldots$
d. $\mu = 33\frac{1}{3}\%$

a	25	16%
b	21	13%
c	55	35%
d	35	22%
N/A	23	14%
N	159	

Reflexiones y lecciones aprendidas

Las respuestas correctas (b, a, y c) fueron seleccionadas por 45%, 16% y 35% de los estudiantes respectivamente. El propósito de la primera pregunta era evaluar la idea del cambio variacional de las expresiones como una función de la variación de sus variables constituyentes. Trigueros y Jacobs (2008, p. 6) reportan estudios que muestran las dificultades de los estudiantes para determinar intervalos de variación o para pensar en situaciones dinámicas, elementos fundamentales para la comprensión de las funciones. Consideramos que si los estudiantes no pueden detectar la forma en que un cambio en el denominador de una fracción afecta el tamaño de la fracción, tendrá dificultades entendiendo relaciones variacionales más complejas.

El segundo problema evalúa, en un entorno algebraico, elementos del pensamiento proporcional como abstracción de propiedades estudiadas en tablas de proporciones. Es importante indicar que esta pregunta debe verse como resultado del proceso de verticalización matemática, ya que el estudiante ha abstraído las propiedades del trabajo con tablas de proporciones. Resulta un tanto complicado resolver el problema algebraicamente; sin embargo, puede resultar evidente para un estudiante que domina las propiedades de las proporciones.

El tercer problema evalúa la capacidad de los estudiantes para transitar por las diferentes representaciones de las fracciones, los porcentajes y el formalismo decimal al expresar los números racionales. Consideramos que los estudiantes que ingresan a los cursos de matemáticas universitarias deben tener un entendimiento apropiado de estos temas. El bajo porcentaje de respuestas correctas preocupó a los autores.

Propuesta teórica para el estudio del sentido numérico

Muchos autores han reconocido las diferentes formas de interpretar los números (Freudenthal, 1983; Kieren, 1980; Tall, 1991; Wu, 2015). Los estudiantes pueden reconstruir estos significados con la guía de sus maestros quienes se valen de ciertos modelos para facilitar la tarea. La Educación Matemática Realista (EMR) ha sido muy efectiva y eficiente en la producción de modelos que permiten la reconstrucción del concepto de número. Nuestra propuesta de investigación del sentido numérico está íntimamente relacionada con EMR y capitaliza de su implementación práctica. Proponemos que el sentido numérico además de los números, sus relaciones y operaciones, se compone de las dimensiones métrica, algebraica, variacional y probabilística (López Fernández, Quintero Rivera, Hernández Rodríguez, y Velázquez Estrella, 2016).

T1. La dimensión algebraica del sentido numérico. Existen muchos modelos descriptivos asociados a secuencias didácticas que progresivamente conducen a la recta numérica real. Las más primitivas son, quizás, la sarta de cuentas y la recta numérica "vacía" (Treffers, 1991a, pp. 40-42; Gravemeijer, 1994a, p.120). Ambas se enriquecen de la secuencia de conteo que los niños traen a la escuela desde su casa y que puede terminar en diferentes números.

- La sarta de cuentas es un manipulativo que consiste de un cordel con cuentas de dos colores intercaladas en grupos de cinco o diez. La sarta de cuentas es un precursor de la recta numérica vacía, que a su vez es la versión primitiva para la recta numérica que se utiliza para representar fielmente el ordenamiento de números y la asignación de un número único a cada punto de esa recta (López Fernández, Quintero Rivera y Hernández Rodríguez, 2015).

- La recta numérica vacía es un modelo descriptivo útil en la implementación de estrategias especiales de conteo, representadas a menudo por "saltos" de uno, diez, cien, etc. Van den Heuvel-Panhuizen (2000, pp. 5-7) discute lo que ella llama el "principio de nivel" y muestra etapas evolutivas desde la sarta de cuentas a las rectas numéricas vacías. La recta vacía carece de toda noción de "distancia" y, por lo tanto, está muy lejos de ser una "regla".

Estos dos modelos conducen a otros modelos prospectivos, como rectas dobles y tablas de proporciones que son ingredientes esenciales, como veremos, para configurar la “recta numérica métrica”. Existen otros modelos descriptivos y prospectivos asociados a secuencias de instrucción y susceptibles a actividades de experimentación para llegar a la automatización de los datos y procesos que conforman el sentido numérico. Por limitaciones de espacio no los indicamos aquí pero lo haremos en el taller.

T2. La dimensión métrica del sentido numérico. Como se indicó en T1, poco a poco se ha construido una recta con las siguientes propiedades: cada punto en la recta corresponde a un número único (su coordenada), y todos los números son coordenadas de puntos en la recta. Además, la comparación de órdenes entre coordenadas de puntos es consistente con las posiciones relativas de los puntos correspondientes, siendo las que están más a la izquierda las más pequeñas. Sin embargo, la propiedad que da a esta recta de números su derecho a ser llamada "métrica" es que la distancia entre dos puntos corresponde a la diferencia de sus coordenadas. Por supuesto, el modelo de la recta métrica, en contraposición a la recta numérica vacía, incorpora importantes elementos de pensamiento algebraico y proporcional (Van Galen, Fejis, Figueiredo, Gravemeijer, Herpen, & Keijzer, 2008, pp. 29-33; Van den Heuvel-Panhuizen, 2000).

- Mucho de lo que llamamos sentido numérico está íntimamente relacionado con nuestro sistema de números indo arábigo, basado en la amplificación o contracción de la unidad numérica por factores de 10 (amplificaciones) o subdivisiones obtenidas dividiendo por 10. Las porciones vacías de la recta numérica métrica ayudan a entender la estructura decimal de la recta real. Por ejemplo, en la Figura 4 se dan los valores para los números reales A y B, y se espera que el estudiante encuentre el número correspondiente a C. Por ejemplo, si A = 2 y B = 6, entonces C = 9, o si A = 0,1 y B = 0,3 entonces C = 0,45. Los modelos de amplificación / división de las rectas numéricas métricas son ejemplos de modelos de densidad y pueden contribuir significativamente a la comprensión del sistema de números racionales y la naturaleza de las irracionalidades en la recta real.

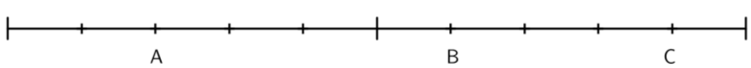

Figura 4. Segmento de recta métrica.

- La geometría de la recta real representa una fuente significativa de "pruebas" y "refutaciones" para muchas propiedades de los números reales. Por ejemplo, la representación decimal de un número real x en el intervalo unitario de la recta real (por conveniencia suponemos que x no es una fracción decimal) dice algo muy específico sobre su colocación en el intervalo de unidad infinitamente divisible de la recta numérica. Por ejemplo, si el primer dígito decimal de x es 2, entonces el número se localiza en el tercer intervalo de la subdivisión del intervalo unitario en 10 partes iguales. Si procedemos a la división de este último intervalo en 10 subintervalos homogéneos y el número se situaría, digamos, en el sexto intervalo, entonces el segundo dígito en la expansión decimal debe ser un 5 ya que debemos tener

$$x \in \left[\frac{2}{10}+\frac{5}{10^2}, \frac{2}{10}+\frac{6}{10^2}\right), \text{ y así sucesivamente.}$$

Hay una excepción obvia a tener en cuenta, y es que las fracciones decimales tienen dos expresiones decimales, una de ellas infinita; por ejemplo,

$$0.999\ldots = 1 \qquad\qquad 0.25 = 0.24999\ldots$$

- Entre los modelos descriptivos de la educación matemática que entran en el desarrollo eventual de la recta numérica métrica están, como se ha mencionado anteriormente, las tablas de razón y proporción y las rectas numéricas dobles calibradas. En el tratamiento de las fracciones, se emplea el contexto de división equitativa y se utilizan los modelos antes mencionados para establecer las relaciones correspondientes entre fracciones, porcentajes y decimales (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Según Wu (2015), la recta numérica métrica juega un papel importante en la comprensión de fracciones, decimales y porcentajes y conduce directamente al álgebra. En el fondo, el sistema de números para el álgebra es el campo de todos los decimales, racionales o no. Desde luego, este punto de vista está íntimamente ligado a la estructura de la recta numérica métrica, de ahí su importancia. Debe mencionarse que Freudenthal (1973, pp. 197-210; 1999, pp. 1-33) elabora la fenomenología didáctica de las magnitudes en general y de la longitud en particular, y todos los modelos mencionados anteriormente son consistentes con ese fenomenología. Además, Freudenthal argumenta la necesidad de extender la operación por números racionales para incluir números reales, una característica muy importante para el cálculo y el análisis.
- La Aritmética de Punto Flotante (APF) utilizada en instrumentos informáticos como las calculadoras y computadoras, pueden estilarse como modelos descriptivos útiles para entender la recta numérica métrica. Por ejemplo, en la APF hay intervalos cuyos puntos medios coinciden con uno de los extremos del intervalo y también se puede encontrar un número digital no nulo μ con la propiedad de que $1 + \mu = 1$.
- También, en los libros de texto holandeses fundamentados en la EMR los profesores pueden encontrar ejercicios de integración de conceptos como el siguiente:

  Dado que $\frac{324}{4} = 81$, rellena la segunda columna de la siguiente tabla:

2.5×324	$=$
3.24×0.25	$=$
$3.24 \div 4$	$=$
324×0.0025	$=$
25×36	$=$
0.0025×0.0324	$=$

Esta familia de ejercicios es muy útil para aplicar las propiedades aritméticas y conseguir la automatización de los procedimientos relacionados a la representación notacional de las fracciones, los decimales y los porcentajes.

T3. La dimensión variacional del sentido numérico. Las tablas dan lugar a la idea de la relación entre variables y la relación entre variables da lugar a relaciones funcionales y gráficas. Esta es una de las partes más interesantes del sentido numérico y hay muchos modelos descriptivos en la literatura. A este respecto, cabe destacar el trabajo de los investigadores del Instituto Freudenthal (Kindt, 2004, 2009; Kindt, Dekker, & Burrill, 2006). De su trabajo, una hipótesis de trabajo razonable que surge es que los estudiantes van de patrones a tablas, y de tablas a secuencias y funciones, y también que las secuencias inductivas son importantes en el dominio de la noción de función (Kindt, 2004, pp. 37, 50 - 54, y 64 - 65). Los modelos descriptivos en las referencias dadas incluyen diagramas de flechas, diagramas de flujo de operaciones algebraicas y máquinas de funciones. Las relaciones de los objetos algebraicos se promueven aplicando modelos de recta numérica así como la relación entre la geometría plana y el álgebra. En esta entrada taxonómica también incluimos modelos de cantidades continuas que permiten un razonamiento numérico cualitativo que tiene que ver con la existencia de ciertos números; por ejemplo, la existencia de un número real cuyo cuadrado es dos y la existencia de dos puntos antípodas en un único meridiano de la superficie de la Tierra que tiene las mismas temperaturas.

- El sentido numérico variacional incluye el reconocimiento automático del hecho que para un número positivo a con $a < 1$, se tiene que $a^2 < a$; o que para un número positivo x se cumple que,

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{x}.$$

- El examen visual de algunas expresiones algebraicas deben brindar automáticamente información al estudiante sobre las propiedades para ciertos valores de las variables.
- Los modelos descriptivos pueden incluir descripciones verbales, tablas o gráficas. Al principio los estudiantes hacen gráficas para capturar el comportamiento de las variables; a la inversa, mediante el examen de gráficas específicas deben ser capaces de inferir relaciones funcionales entre las variables. Las discusiones de procesos continuos (que en realidad son aplicaciones del Teorema del Valor Medio para funciones continuas) son útiles como modelos descriptivos para la solución de problemas sobre la existencia de irracionalidades. Por ejemplo, en la Figura 5 el cuadrado de dibujo se mueve a lo largo de la recta $y = x$ en el primer cuadrante, alejándose del origen.

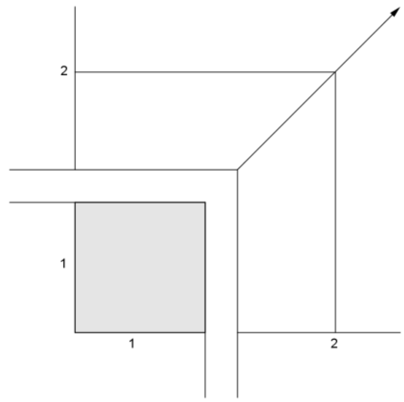

Figura 5. Cuadrado en crecimiento.

Como el movimiento es continuo y describe un cuadrado de área uno y se mueve continuamente hasta formar otro cuadrado de área 4, debe describir un cuadrado de área 2 cuyo lado debe ser $\sqrt{2}$.

T4. Sentido numérico asociado a la probabilidad y la estadística. El estudio de la estadística en los grados más elementales debe incluir exclusivamente el estudio de tablas y gráficos y la representación de datos. Recordemos que el acta de nacimiento de la estadística consiste de las tablas de mortalidad publicadas por John Gaunt en el siglo XVII para impresionar al rey Carlos II de Inglaterra sobre la posibilidad de regular el trabajo y la producción en términos de cuánto tiempo la gente tenía vidas productivas. La probabilidad se interpretó inicialmente como frecuencias observadas de ciertos eventos y se convirtió en matemáticas abstractas empleando modelos discretos de recuento, en algunos casos, y distribuciones y densidades, en otros (probabilidades que son discretas o tienen una "parte continua"). Algunos aspectos de las fenomenologías históricas y didácticas de probabilidad y estadística se presentan en Freudenthal (1973). Con la disponibilidad de la teoría de las funciones, es posible avanzar significativamente en la matemática de la probabilidad. También hay elementos obvios de sentido numérico relacionados con la naturaleza de los datos cuyas medidas de tendencia central conocemos porque se dan, o por la aplicación de resultados como la Ley de Grandes Números o el Teorema Central del Límite. En este último caso ofrecemos el ejemplo relacionado con la Distribución Normal como el límite de las distribuciones de probabilidad Bernoullianas.

- La probabilidad discreta comienza con modelos prospectivos para contar eficientemente. Esto progresa en situaciones en las que la probabilidad geométrica se utiliza para calcular las frecuencias. Finalmente, la situación general se describe por modelos de distribución y densidad.
- La estimación y la probabilidad son similares entre sí con respecto al sentido numérico, aunque sus acciones mentales para obtener estimaciones y estimaciones de probabilidad son muy diferentes. Sin embargo, ambas categorías de sentido numérico abordan la cuestión matemática en la que una respuesta determinada es imposible o, evidentemente, desconocida.

T5. Sentido numérico asociado a la estimación. La estimación rara vez es un tema central de discusión en la literatura de la EMR. Consideramos que la estimación utiliza los mismos modelos que las otras entradas taxonómicas para el sentido numérico, excepto que en el contexto de la estimación se utilizan modelos determinados pero sin información exacta, es decir, con información aproximada. La única excepción a esto es, por supuesto, la probabilidad, que proporciona respuestas estimadas a situaciones contextuales que no admiten respuestas definidas. Por supuesto, esto presume imponer metodologías de investigación particulares para determinar la verticalización alcanzada a medida que tales modelos descriptivos se convierten en modelos prospectivos. En esta situación, la matematización del proceso de estimación debe separarse de la matemática vertical que se deriva del modelo determinístico original. A continuación presentamos algunos ejemplos para ilustrar el punto.

Figura 6. Niños en una juguetería.

- Lo que se muestra en la Figura 6 es una ilustración de un libro de primer grado que intenta involucrar a los estudiantes en una conversación sobre cómo contar objetos en una juguetería. El diagrama muestra a dos niños mirando algunas exhibiciones en la tienda de juguetes. Se pregunta a los estudiantes, en un caso por el número de osos de peluche y en el otro por el número de carritos de juguete.
  A los efectos de contar, podemos hacer las preguntas indicadas y esperar una respuesta bajo la suposición de que el estudiante que no puede ver sigue el mismo patrón de lo que de hecho pueden ver. Pero si no asumimos esto, entonces el problema no tiene una respuesta determinada y por lo tanto es un problema de estimación. En una investigación reciente, pudimos observar que los estudiantes optaron por un patrón que se aplica a lo que no ven, mientras que en el problema de la estimación los estudiantes tienen que pensar en límites inferiores y superiores para los objetos que no pueden ver. Es una diferencia sutil, pero importante.
- También resaltamos la diferencia entre el problema de estimar el tiempo de espera de un coche que llega aleatoriamente a un semáforo, cuyos tiempos de ciclo conocemos para cada dirección y el problema de estimar el número total de árboles de un cierto tipo que podemos ver durante un viaje en carro. El primero es un problema de probabilidad, mientras que el segundo es un problema de estimación. Se cree que ambas respuestas son imprecisas y aproximadas. El segundo problema sería más fácil si los árboles tuvieran algún patrón bien definido o si pudiéramos tener un mapa topográfico que indique todos los árboles en el área del viaje. Pero en ausencia de tal información debemos hacer suposiciones especiales, por ejemplo, la frecuencia promedio asociada a ver un árbol. Hay otra diferencia importante aquí. El primer problema tiene una respuesta estimada sólo porque la respuesta depende de los tiempos observados durante períodos de tiempo relativamente largos (frecuencias que se interpretan como probabilidades), mientras que

el segundo es básicamente un problema determinista directo que ha sido despojado de alguna información que debe ser "adivinada" para empezar el proceso de solución del problema.

Nuestra propuesta para una clasificación taxonómica de los modelos de la didáctica de la matemática sigue los principios de la EMR y es coherente con las ideas de Hans Freudenthal sobre el papel de la historia de las matemáticas en la elaboración de fenomenologías didácticas para el estudio de las matemáticas. Al examinar los modelos descriptivos y prospectivos de la EMR que conducen a los modelos centrales de matemáticas, encontramos una plétora de explicaciones de la verticalización que se produce y la automatización implícita del número y de los hechos cuantitativos, los patrones y las relaciones de lo que constituyen lo que llamamos "sentido numérico".

Para tener éxito en el estudio de las matemáticas, los estudiantes deben ser capaces de desarrollar este sentido numérico de tal manera que les permita identificar los argumentos esenciales en las demostraciones o refutaciones y de esta forma poder leer y escribir matemáticas eficientemente. Cuando estudian un tema dado por primera vez, es costumbre que muchos de ellos inviertan bastante tiempo en descifrar los detalles de los argumentos matemáticos. Esto es, por supuesto, natural, ya que las notaciones a menudo representan obstáculos a la capacidad de los estudiantes para extraer significados. Sin lugar a dudas, esta capacidad mejora con la práctica y con el logro de niveles más altos de conocimiento matemático se les revela la estructura de las matemáticas.

Conclusión

Nuestro interés por el estudio del sentido numérico surgió al observar que los estudiantes que entran a la Universidad tienen grandes dificultades en la construcción de conceptos indispensables para el entendimiento de las funciones y el cálculo. Las observaciones indicaban que los estudiantes tenían deficiencias en el manejo de los números reales y más aún carecían de intuiciones relativas al orden, la densidad y el efecto de las operaciones en los diferentes conjuntos numéricos. El primer acercamiento al problema fue tratar de medir el sentido numérico que traían los recién ingresados a la Universidad.

En la revisión de literatura relacionada, encontramos que el concepto de sentido numérico fue introducido en la década de los ochenta y que aún hoy día no está bien definido. De la misma manera encontramos que las preguntas de investigación y los marcos teóricos para su estudio no están claramente establecidos. Los asistentes a la conferencia de la NSF de 1989 atestiguan, y los acontecimientos posteriores confirman, que la investigación de la educación de matemáticas ha sido incapaz de dar respuestas satisfactorias a preguntas relacionadas con lo que es el sentido de número, cómo lo medimos y evaluamos, cómo lo enseñamos en la escuela, cómo está vinculado al cálculo mental y la estimación, y qué marcos de investigación podrían considerarse más convenientes para llevar a cabo la investigación sobre el tema.

Los principios de la EMR junto con una taxonomía de todos los modelos descriptivos y prospectivos pueden complementarse para conformar el marco teórico apropiado para la investigación del sentido numérico. Con ellos se pueden identificar los elementos esenciales en la verticalización y automatización que se incorporan en las estructuras mentales. Este enfoque podría dar dirección a los contenidos curriculares de la educación matemática en términos de las expectativas por grado y del logro de habilidades de sentido numérico y así los maestros tendrían una visión más realista y productiva del currículo.

La EMR subraya la necesidad de revisar y reflexionar sobre los temas con el fin de lograr la matematización vertical, alcanzando mayores niveles de comprensión en áreas matemáticas específicas. Treffers (1991b, p. 24) se refiere precisamente a este punto y observa que la verticalización ocurre durante largos períodos de tiempo y mediante la revisión desde diferentes perspectivas de los temas matemáticos a lo largo de las diferentes etapas de la educación. A propósito del papel de los modelos, esto implica que los modelos de la educación matemática se verticalizan progresivamente en el proceso de desarrollo de niveles superiores de comprensión y abstracción (Gravemeijer, 1994b). Implícita en esta verticalización hay elementos de automatización de las características del modelo estructural así como de los procesos mentales. Dicha automatización permite a los estudiantes aumentar su conocimiento de manera eficiente, ya que son capaces de reunir los recursos automatizados y utilizarlos como elementos básicos o dados en el uso posterior de modelos para describir nuevas situaciones matemáticas.

Desde luego que es necesaria más investigación para describir con mayor exactitud los procesos de verticalización, sin embargo, ahora contamos con una taxonomía que puede ayudar a los maestros y a los investigadores a realizar el trabajo.

Bibliografía y referencias

Gravemeijer, K. P. E. (1994a). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD-ß Press Freudenthal Institute.

Gravemeijer, K. P. E. (1994b). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5), 443-471.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Holland: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1999). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holland: Reidel Publishing Company.

López Fernández, J., Quintero Rivera, A. H. y Hernández Rodríguez, O. (2015). Desarrollo del sentido numérico para la construcción del concepto de número real. XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática.

López Fernández, J., Quintero Rivera, A. H., Hernández Rodríguez, O. y Velázquez Estrella, A. (2016). Sentido numérico: más allá de los números. Impreso por CreateSpace. Charleston, SC.

Kieren, T.E. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. In T. E. Kieren (Ed.), *Recent research on number learning*, (pp. 125-150). Columbus, Ohio: Information Reference Center, Ohio State University. (ERIC Document Reproduction Service No. ED212463).

Kindt, M. (2004). *Positive Algebra: A Collection of Productive Exercises*. Utrecht, Holland: Freudenthal Institute.

Kindt, M. (2009). Re(j)alistic Math: On the occasion of ten years Isfahan Mathematics House, *Nieuwe Wiskrant*, 28, 41-45. Available at http://www.fi.uu.nl/wiskrant/artikelen/284/284juni_kindt.pdf.

Kindt, M., Dekker, T., & Burrill, G. (2006). *Algebra rules!* Chicago: Encyclopædia Britannica, Inc.

Sowder, J. T., & Schapelle, B. P. (Eds.). (1989). *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a Conference*. ERIC document ED317413.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Treffers, A. (1991a). Realistic mathematics education in the Netherlands 1980-1990. In L. Streefland (Ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School.* Utrecht: CD-ß Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.

Treffers, A. (1991b). Didactical background of a mathematics program for primary education. In L. Streefland (ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School.* Utrecht: CD-ß Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.

Trigueros, M. & Jacobs, S. (2008). On developing a rich conception of variable. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education* (pp. 3-13). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour.* Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 9–35.

Van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K. Van Herpen, E., Keijzer, R. (2008). Fractions, percentages, decimals, and proportions: A learning-teaching trajectory for grades 4, 5 and 6. TAL-project, Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education. Utrecht University. Rotterdam: Sense Publishers.

Wu, H. (2015). *Understanding numbers in elementary school mathematics.* Providence, RI: American Mathematical Society.