El número complejo desde el imaginario matemático de algunos profesores en la región del Eje Cafetero

Oscar **Fernández** Sánchez
Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia
oscarf@utp.edu.co
Mónica **Angulo** Cruz
Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia
monac@utp.edu.co

Resumen

Se asume que tanto el discurso matemático profesional, accesible al estudiante a través de la transposición didáctica, como el discurso matemático escolar producto de esa transposición, están habitados por metáforas y que es a través de éstas que se refleja el imaginario institucional de una comunidad de discurso. Se considera la metáfora en su concepción cognitiva, no como elemento estético. Las metáforas implicadas en la enseñanza del número complejo es un hallazgo del proyecto de investigación "Imaginarios Matemáticos en el Eje Cafetero 2016-2017. Fase uno", a través del cual, con un enfoque de investigación cualitativo se busca hacer una descripción de las tendencias en las expresiones metafóricas presentes en el discurso no profesional que usan los docentes de matemáticas en esta región.

Palabras clave: Metáforas, imaginario matemático, número complejo, discurso matemático de aula.

Introducción

En (Castoriadis, 1993, citado en Erreguerena, 2002, p. 40) es posible entender que el término imaginario social es usado para representar "la concepción de figuras/formas/imágenes de aquello que los sujetos llamamos "realidad", sentido común o racionalidad en una sociedad. Esta "realidad" es construida, interpretada, leída por cada sujeto en un momento histórico social determinado". Con esto se concibe el hecho que es cada individuo como sujeto de un grupo social quien recrea continuamente ese imaginario, y así se transforma a sí mismo y a su entorno social.

El mismo autor en (Castoriadis, 1997, p.9), dice que "las significaciones imaginarias sociales crean un mundo propio para la sociedad considerada, son en realidad ese mundo: conforman la psique de los individuos". El grupo social considerado aquí es el de los profesores de matemáticas en la región del llamado Eje Cafetero, el cual según este autor, mediante las significaciones que conforman el imaginario social crean una representación del saber matemático, lo que en (Godino, Batanero & Font, 2008) consideran como significado institucional.

Desde otro punto de vista (Pakman, 2014) considera que,

> El imaginario social se constituye continuamente mediante un proceso de apropiación de algunas imágenes por parte de los procesos de significación que constituyen los saberes/poderes de la micropolítica dominante, y tiene una función hegemónica dentro de la misma, al igual que el sujeto en general, a expensas de la singularidad de la experiencia vivida (p. 129).

Donde los saberes poderes de la micropolítica dominante en este caso sería lo que se ha denominado saber matemático profesional, o significados institucionales (Godino, et al., 2008). Según Pakman el imaginario social se impone a la singularidad de la experiencia vivida de cada integrante del grupo social. Dice (Lizcano, 2006) que el imaginario es posible encontrarlo no solo en los mitos y leyendas de los grupos sociales, como tradicionalmente se ha pensado, sino en formas expresivas de la racionalidad como es el lenguaje de las matemáticas. Un lenguaje que no adolece de elementos del imaginario colectivo, en tanto creación humana, y al cual se accede como el mismo (Lizcano, 2006) dice, a través de la metáfora.

De la metáfora se ha escrito mucho, basta ver la bibliografía citada en textos especializados y se puede verificar la abundancia de trabajos sobre el tema (Aristóteles, 2006, 2007, Cicerón, 2013, Nietzsche, 2006, Black, 1955, Dormolen, 1991, De Bustos, s.f, Lizcano, 2006, Perelman, 1997, Serna, 2007, Lakoff y Johnson, 1995, Lakoff y Núñez, 2000). Sin embargo, aquí se tiene en cuenta en este proyecto las consideraciones que sobre la metáfora que hace (De Bustos, s.f.) y (Perelman, 1997), por su enfoque apropiado para el objetivo planteado.

Según (De Bustos, s.f., p. 5) la metáfora es un fenómeno que ocurre en la mente con el cual es posible asimilar y categorizar la experiencia y mediante el cual es posible la constitución de conceptos abstractos. Esta manera de concebir la metáfora está en consonancia con lo que espera el docente de matemáticas que ocurra con su actividad en el aula.

En (Perelman, 1997, citado en Fernández, p. 179) se toma como base la estructura proporcional de la analogía A es a B como C es a D de la que es posible derivar la metáfora "A es D" o "C es B" o "A es C" y muestra esto con el ejemplo: "la vejez es a la vida lo que la noche es al día", se derivan las metáforas: "la vejez del día", "la noche de la vida" o "la vejez es una noche".

Según (González, 2014), en el discurso de los docentes de matemáticas abundan las metáforas, y éstas de igual forma que ayudan a entender aspectos abstractos al estudiante, en ocasiones obstaculizan el aprendizaje. Los resultados de la investigación de (González, 2014), es un antecedente importante que induce la pregunta ¿qué metáforas sustentan el imaginario colectivo, desde el cual se estructura el discurso de los docentes de matemáticas en el Eje Cafetero?

En el presente trabajo se muestra el caso del tema número complejo y las metáforas halladas en las expresiones metafóricas que se hallaron como resultado del análisis de los datos obtenidos a través de instrumentos de investigación cualitativa en el desarrollo del proyecto de investigación Imaginarios Matemáticos en el Eje Cafetero 2016-2017. Fase uno. Cuyo problema de investigación consiste en indagar sobre las metáforas presentes en el discurso de aula de los docentes de matemáticas en la región del Eje Cafetero.

Método

Teniendo en cuenta la naturaleza focal de las expresiones metafóricas presentes en cada discurso se considera apropiado el enfoque de investigación cualitativo, y debido también a los instrumentos de investigación que se han aplicado: Grabaciones de audio y video de clases simuladas de 32 profesores en formación y de clases simuladas y en el aula de 30 profesores en ejercicio que trabajan en educación secundaria (bachillerato) en la región. En el proceso de categorización y subcategorización de los datos para generar una teoría, se tendrá en cuenta la codificación axial y selectiva sugerida en (Strauss y Corbin, 2002).

Análisis

Como herramientas de análisis cualitativo se planeaba usar mapas conceptuales, matrices de correlación y diagramas como el “modelo relacional” generado como resultado de investigación en (Angulo, 2011, p. 73) con las categorías iniciales: metáforas estructurales, metáforas orientacionales y metáforas ontológicas (Lakoff y Johnson, 1995), todo este análisis asistido con el software Atlas.ti, V7, que es un software que se usa como auxiliar en el análisis de datos cualitativos (Hernández, Fernández y Baptista, 2006); sin embargo, con el uso del software para los primeros datos se evidenció la necesidad de hacerlo de manera más pausada a través de matrices de análisis, debido a la naturaleza de los datos, puesto que lo que se buscan son frases metafóricas que en el lenguaje de la matemáticas son sutiles y tienen una carga histórica fuerte. En cuanto al diseño de investigación, según (Hernández, et al. 2006), “el término diseño adquiere otro significado distinto al que posee dentro del enfoque cuantitativo […] porque las investigaciones cualitativas no se planean con detalle y están sujetas a las circunstancias de cada ambiente o escenario particular” (p. 686). Dadas las características de los instrumentos de investigación cualitativa, los cuales no son estandarizados como en el caso cuantitativo, puesto que es cada investigador el instrumento de recolección de los datos y los ambientes son particulares en cada caso, además que están en constante cambio, circunstancias que hacen de cada estudio algo único, por lo cual se puede considerar que cada investigación cualitativa es por sí misma un diseño de investigación (Hernández, et al. 2006). Sin embargo, entre algunos tipos está el de “la teoría fundamentada (Grounded Theory). […] Su propósito es desarrollar teoría basada en datos empíricos, son de naturaleza “local” […] sus explicaciones se circunscriben a un ámbito determinado, pero poseen riqueza interpretativa y aportan nuevas visiones de un fenómeno” (p. 687).

Resultados

En la obtención de información. Se han obtenido datos de la siguiente manera:

- Audios y videos de clases simuladas de 32 profesores en formación del programa Licenciatura en Matemáticas y Física,

- Audios y videos de clases tanto simuladas como de aula en colegio, de 30 profesores de la región que se encuentran en el programa Maestría en Enseñanza de la Matemática.
- Cuatro trabajos de investigación de profesores en ejercicio que realizan estudios en la Maestría en Enseñanza de la Matemática pertenecientes al grupo de investigación GIPEMAC, a través de los cuales se busca encontrar algunas implicaciones del lenguaje metafórico usado por los docentes para enseñar algunos conceptos matemáticos en el nivel de educación secundaria (bachillerato).

En la sistematización de la información. Se han realizado las transcripciones de los datos. En ese proceso se ha visto la necesidad de dar forma a las transcripciones y de diseñar formatos para ubicar las unidades de análisis, que en este caso son párrafos y diálogos de docentes y estudiantes que involucren frases metafóricas. Una vez se disponga de la información organizada en estos formatos, se procede a refinarla en la medida que requiere ser interpretada siguiendo las teorías que sobre la metáfora se encuentra en (Lakoff y Johnson, 1995, Lakoff y Núñez, 2000, Aristóteles, 2006 y 2007, Lizcano, 2006, Perelman, 1997 y Dormolen, 1991).

Conclusiones

Aun no hay conclusiones del proyecto en general; sin embargo, en lo que llevan los análisis se han podido identificar algunas categorías iniciales. Entre las categorías está la de número complejo y número imaginario, y un corpus de frases metafóricas relacionadas con estas categorías. En la tabla 1 se enuncian las frases metafóricas identificadas que componen dicho corpus:

Tabla 1

Expresiones metafóricas en el discurso de aula sobre el número complejo en la Región del Eje Cafetero.

Categoría	Frases metafóricas
	El número complejo es el color producido por la mezcla entre el color azul y rojo, el morado; azul, asociado a la parte real y rojo, a la parte imaginaria.
	El número complejo es el cuadrado que se forma por la unión de dos triángulos, uno de color azul, para representar la parte real, y otro de color rojo para representar la parte imaginaria.
	El número complejo es un elemento de un conjunto de números distintos, de números producto de una extensión necesaria de los números ya conocidos. Se enseña el conjunto de los números complejos como una extensión necesaria donde se pueda resolver ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$. Se resalta la imposibilidad de resolverla en el conjunto de los números reales, es decir, que las posibles soluciones, $x = \pm\sqrt{-1}$ no se puede ubicar en ninguno de los conjuntos conocidos hasta el momento en que se está hablando de esta ecuación.
	El número complejo es la suma de dos números diferentes, una parte real simbolizada por la letra a, y de una parte imaginaria llamada b, la cual va acompañada de la letra i para identificarla como imaginaria, esto se simboliza como a + bi.
	El número complejo es un punto en un plano. La idea se expresa por la asociación

Número complejo	metafórica $a + bi = (a, b)$.
	El número complejo es un número que tiene un cuadrado negativo. Con estos "números complejos" ya es posible resolver cualquier ecuación, estos nuevos "números" al salirse de las fronteras de la recta de los números reales, arrasan con las imposibilidades que hasta su momento imponían las raíces de cantidades negativas.
	El número complejo es una raíz de un número negativo. Surge cuando el profesor escribe en el tablero $\sqrt{-9}$, y pregunta por la posibilidad de encontrar, entre los números conocidos, un número *r* para el cual $r * r = -9$, a lo cual responden los estudiantes que no es posible. El profesor ratifica que no se encuentra entre el conjunto de los números reales un número que sea la raíz cuadrada de -9, o que multiplicado por sí mismo de -9.
	El número complejo es un símbolo z, donde se utiliza la metáfora z = *a* + *b i*, para expresar que se considera a *a* + *b i* como si fuera un numeral z.
	El número complejo es un vector. Para expresar que en el plano complejo se manipula gráficamente como un vector.
	El número complejo es un número real absorbido al ser sumado con un imaginario. La profesora insinúa que de manera análoga como se puede operar un número irracional con un número natural, o un número entero, o un número racional y el resultado queda dentro de los irracionales; es posible operar un número real con un número imaginario y el resultado queda dentro de un "conjunto nuevo", el de los llamados "números complejos", creado observando lo que ocurría con los resultados de operar números irracionales con otros, es decir, los números son "absorbidos" por el conjunto de los números irracionales a través de la operación de suma o resta. Lo mismo le ocurre a un real cuando es operado con un número imaginario, se piensa que es "absorbido" por el conjunto de los números complejos.
Número imaginario	*Un número imaginario es una raíz imposible*. La parte imaginaria de un número complejo surge de la imposibilidad de hallar raíces de números negativos como $\sqrt{-9}$.
	El nuevo número i es la unidad del conjunto de los números imaginarios. Se dice que 7i es siete veces la unidad en el conjunto de los números imaginarios.
	La unidad imaginaria es la unidad real rotada 90°, lo que implica que "no está en el eje real" sino en un eje de números imaginarios porque al hacer la rotación "se sale" del eje de los números reales.

Fuente: transcripciones de audios y videos de las clases de docentes en el Eje Cafetero. 2016.

Observaciones

Las dos partes del número complejo tienen un hábitat geométrico similar al plano cartesiano, la parte real se ubica en el eje horizontal y la parte imaginaria en el eje imaginario. Atendiendo a la estructura metafórica proporcional

$$\frac{\textit{número real}}{\textit{punto en la recta}} = \frac{\textit{número complejo}}{\textit{punto en el plano}}$$

Bajo la cual se considera a los puntos en el plano como si fueran números complejos y a éstos como si fueran puntos en el plano, y así se usa la metáfora "plano complejo" para referirse a esta relación. Atendiendo a esta metáfora se usa la equivalencia $a + bi = (a, b)$.

Donde a sería la parte real y como coordenada del punto-número sería la primera componente, y b la parte imaginaria y como coordenada del punto-número sería la segunda componente.

Este metáfora expresa una suma inconclusa entre un objeto conocido, llamado número real y uno desconocido y que no se ajustó a los números convencionales que desde Euclides se manejaban, por lo que se usó la metáfora "números imaginarios" para referirse a ellos. Una suma que permanece sin efectuar, una suma en potencia atrapada en una metáfora numérica que con el uso ha perdido la fuerza de su novedad y tan solo interesa por sus cualidades como objeto manipulable.

Para representar los nuevos entes fue necesario considerar la metáfora $a + b\,i$, la cual consta de cuatro símbolos: "*a*", para representar una cantidad real, "*i*" para representar el ente imaginario $\sqrt{-1}$, el cual se asume como una "unidad" para dar escala a una recta con una correspondencia entre sus puntos y estos "nuevos números", y se usa el símbolo "*b*" para representar las multiplicidades de esta "unidad imaginaria" y ubicarlas en la recta "imaginaria". Por último, se usa el índice "+" (en términos de Pierce) para indicar que el numeral "*a*" va unido a la multiplicidad "*bi*" al expresar soluciones posibles de ecuaciones de la forma $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, teniendo en cuenta el algoritmo de la llamada "formula cuadrática". Este símbolo, "+" es una metáfora que podría estar expresando una intención, que quedó suspendida en el tiempo, de sumar una cantidad de cosas, que se está seguro es posible percibir, con otras que se esperaba también se pudieran percibir y que sin embargo dejó perplejos a los primeros matemáticos que se encontraron con estos entes que resultaron para ese momento desconocidos. Fue una metáfora momentánea que con el correr del tiempo se quedó pendiente por resolver para un momento futuro, en el cual se pudiese saber con qué tipo de números se estaba lidiando; una metáfora, que por lo visto se ha olvidado su naturaleza de metáfora y ha devenido en "número" institucionalizado, al cual se la ha dado el nombre de "número complejo", tal vez para indicar que hallar su verdadera naturaleza fue algo complejo en su momento y los matemáticos que lo intentaron perdieron en el intento, quedando la huella simbolizada en una suma inconclusa entre dos entes, como una expresión de la dicotomía entre el cuerpo y el alma en la obra metafísica de Descartes, quien no logró desprenderse del espíritu de la Grecia Antigua, al encerrar las "raíces cuadradas" de cantidades positivas en una cárcel geométrica, y como él muchos otros como Cardano, Euler, Argand y Gauss, quienes pensaron en la "naturaleza" de las cantidades reales, para transmitirla a los entes imaginarios que aún quedan por entender.

Referencias y bibliografía

Aristóteles. (2006). *Poética*. Traducción de Alicia Villar Lecumberri. Madrid: Alianza Editorial, S. A.

Aristóteles. (2007). *Retórica*. Traducción de Alberto Bernabé. Madrid: Alianza Editorial, S. A.

Ángulo, M. (2011). *Rutinas ciudadanas: Escenarios urbanos hechos de urbanismos ciudadanos desde la família, las parejas, los jóvenes*. Trabajo de grado no publicado de maestria en Comunicación Educativa. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.

Black, M. (1955). Metaphor. En *Philosophical Perspectives on Metaphor de Mark Johnson* (1985). Minnesota: Universidad de Minessota. 63 – 82. Recuperado de https://books.google.com.co/books?hl=es&lr=&id=Y6TzgsS035kC&oi=fnd&pg=PR9&dq=philosophical+perspectives+on+metaphor+by+mark+johnson&ots=_12vPw-pJx&sig=xIzj8oBsvhqLrKniIjgByDgK_Vc#v=onepage&q=philosophical%20perspectives%20on%20metaphor%20by%20mark%20johnson&f=false

Castoriadis, C. (1997). *El imaginario social instituyente*. Trad. Luciana Volco. En Revista Zona Erógena No. 35. Recuperado de http://www.ubiobio.cl/miweb/webfile/media/267/Castoriadis%20Cornelius%20%20El%20Imaginario%20Social%20Instituyente.pdf

Cicerón. (2013). *El orador*. Madrid: Alianza.

De Bustos, E. (Sf.). *La metáfora. Ensayos transdisciplinares*. Recuperado de https://www.academia.edu/

Dormolen, J. (1991). Metaphors Mediating the Teaching and Understanding of Mathematics. En *Mathematical Knowledge: It's growth trough teaching* de Alan Bishop, Stieg Mellin-Olsen y Joop Van Dormolen, 89 - 106. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Erreguerena, M. (2002). *Cornelius Castoriadis: sus conceptos*. En Revista ANUARIO • UAM-X • MÉXICO • PP. 39-47. Recuperado de http://148.206.107.15/biblioteca_digital/capitulos/32-1112kfr.pdf

Fernández, O. (2010). Pensamiento matemático de los mayas. Una creación metafórica. En Entre Ciencia e Ingeniería, Vol 4. No. 8, 174 – 188.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

González, R. (2014). *Posibles implicaciones del discurso metafórico docente en el abordaje del concepto de divisibilidad con estudiantes de séptimo grado de la institución educativa Santa Teresita del municipio de La Victoria (Valle del Cauca).* Trabajo de grado no publicado de maestria en Enseñanza de la Matemática. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México, D.F.: McGraw-Hill/Interamericana.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from : how the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Lakoff, G. y Johnson, M. (1995). *Metáforas de la vida cotidiana*. Segunda edición. Madrid: Cátedra. Recuperado de https://linguisticaunlp.files.wordpress.com/2012/11/lakoff-y-johnson.pdf

Lizcano, E. (2006). *Metáforas que nos Piensan. Sobre Ciencia, Democracia y otras Poderosas Ficciones*. Ediciones Bajo Cero, bajo licencia de Creative Commons.

Nietzsche. F. (2006). *Sobre Verdad y Mentira en Sentido Extramoral*. Traducción Jorge Castillo. Bogotá.

Pakman, M. (2014). *Texturas de la imaginación. Más allá de la ciencia empírica y del giro linguístico*. Barcelona: Gedisa.

Perelman, Ch. (1997). *El Imperio Retórico, Retórica y Argumentación*. Traducción de Adolfo León Gómez. Bogotá: Norma.

Strauss, A. y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoria fundamentada*. Trad. Eva Zimmerman. Medellín: Universidad de Antioquia. Recuperado de https://diversidadlocal.files.wordpress.com/2012/09/bases-investigacion-cualitativa.pdf