II CEMACYC
II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
29 octubre al 1 noviembre. 2017
Cali, Colombia
REDUMATE
ii.cemacyc.org

El uso de tecnologías digitales en el estudio de funciones

María del Carmen **Olvera-Martínez**
Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Juárez del Estado de Durango
México
maria.olvera@ujed.mx

Resumen

Este estudio tiene como objetivo analizar y documentar en qué medida el uso del Sistema de Geometría Dinámica GeoGebra promueve, en profesores de bachillerato, el desarrollo de conocimiento, recursos y estrategias al resolver problemas sobre funciones. Se analizaron las construcciones dinámicas de los problemas realizadas por ocho profesores, los procesos de solución que siguieron, así como las videograbaciones de las sesiones de trabajo. Con base en los episodios de la resolución de problemas y el uso de tecnologías digitales propuesto por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2011), se presentan las formas de razonamiento que desarrollaron los participantes. Los resultados muestran que la exploración de las construcciones dinámicas del problema permitió que los profesores identificaran propiedades y relaciones entre los objetos matemáticos involucrados. Además, los profesores exhibieron un tránsito de lo empírico a lo formal, al formular conjeturas a partir de argumentos visuales, e integrar argumentos geométricos y algebraicos para justificarlas.

Palabras clave: Sistema de Geometría Dinámica, Funciones, Formación de profesores, Resolución de Problemas.

Introducción

Las propuestas curriculares en el ámbito internacional consideran al concepto de función como parte central del currículo de bachillerato (Cooney, Beckmann, & Lloyd, 2010). Además, estas propuestas sugieren que en la enseñanza de las matemáticas se enfatice la resolución de problemas y la incorporación de tecnologías digitales (Common Core State Standards Initiative, 2010; National Council of Teacher of Mathematics [NCTM], 2000; 2009). Con base en estas tendencias, la enseñanza del concepto de función, demanda del profesor una comprensión, análisis y reflexión sobre las principales ideas que giran en torno al estudio de este concepto y, en general, de los contenidos que espera que sus alumnos aprendan.

Cooney et al. (2010) sugieren que el profesor debe conocer, a profundidad, cinco grandes ideas sobre funciones: el concepto de función, covariación y tasa de cambio, familia de funciones, combinación y transformación de funciones y sus múltiples representaciones. Las funciones pueden ser representadas de diferentes maneras, mediante enunciados, expresiones algebraicas, tablas, gráficas, diagramas, entre otras; cada una captura algunas de las características o ideas esenciales del concepto (Niss, 2014). De esta manera, cuando se conocen diferentes representaciones y se identifican las relaciones entre ellas, la comprensión del concepto de función es cada vez más robusta; además, es posible reconocer las ventajas y desventajas de cada representación según los objetivos que se persigan (Confrey & Smith, 1991).

Cuando se involucra el uso de tecnologías digitales en la resolución de problemas sobre funciones, se generan diversas oportunidades para analizar, presentar, identificar y explorar relaciones entre parámetros. El empleo de herramientas digitales dirigidas a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como el sistema de geometría dinámica (SGD) GeoGebra, posibilita la elaboración de construcciones geométricas dinámicas que pueden utilizarse para representar las condiciones de un problema y facilita la exploración de relaciones y significados asociados con los conceptos matemáticos involucrados. No obstante, la incorporación de la tecnología digital en la enseñanza de las matemáticas representa un reto para los profesores. El NCTM (2000) expone que un desafío para éstos es integrar herramientas digitales para que sus estudiantes exploren ideas y formulen conjeturas mientras que deben continuar ayudándoles a comprender la necesidad de las demostraciones o contraejemplos de las conjeturas. En este sentido, Koehler y Mishra (2009) sugieren que los profesores deben ampliar su conocimiento sobre el manejo de tecnologías digitales para poder identificar los propósitos, potencialidades y limitaciones de cada una, así como los cambios que genera su uso dentro del salón de clases. De acuerdo con estas ideas, el presente estudio se enfoca en analizar y documentar en qué medida el uso de GeoGebra, en la resolución de problemas que involucran el estudio de funciones, influye en el desarrollo de conocimientos, habilidades y formas de razonamiento en profesores de matemáticas de bachillerato.

Marco conceptual

Dick y Hollebrands (2011) reconocen que actualmente el uso de la tecnología digital abarca muchas de las actividades de la vida diaria y que también, ha impactado en el desarrollo del conocimiento matemático. El uso de la tecnología digital está cambiando la manera en que las matemáticas son enseñadas y aprendidas. En la actualidad, los profesores deben aprovechar el potencial de la tecnología para "desarrollar el entendimiento de los estudiantes, estimular su interés e incrementar su habilidad matemática" (NCTM, 2008, p. 1).

El uso de la tecnología digital puede considerarse como un elemento *amplificador* o *reorganizador cognitivo*. Como amplificador, es una extensión cognitiva que permite aumentar las capacidades mentales a través del uso de una herramienta, facilitando o extendiendo aquello que se puede hacer sin la herramienta. Como reorganizador cognitivo, la herramienta digital reestructura la cognición en su funcionamiento y en la manera en que se organiza. Es decir, una herramienta actúa como reorganizador cuando permite acceder a otro nivel y construir un nuevo conocimiento cualitativamente distinto de aquel que se podría haber construido sin el uso de la herramienta (Moreno-Armella, 2002).

Resolver problemas con el apoyo de herramientas digitales promueve diferentes formas de representarlos, formular conjeturas y elaborar justificaciones para sustentarlas. Además, de generar la interacción entre las diferentes representaciones de un concepto matemático. Santos-

Trigo y Camacho-Machín (2011) proponen cuatro episodios que ayudan a estructurar y analizar el uso de herramientas digitales en el desarrollo del pensamiento matemático cuando se resuelven problemas. El primer episodio es el de *comprensión del problema*, se identifican los elementos relevantes en el enunciado del problema y se busca la manera de relacionarlos para construir el modelo dinámico que lo representa. En la *exploración del problema*, se utiliza la información que se identificó en la fase de comprensión y se elige la forma en que se explorará el modelo dinámico en busca de la solución del problema. En el episodio *diferentes aproximaciones hacia la solución del problema,* se promueve la búsqueda de múltiples estrategias de solución y así, tener la oportunidad de utilizar diferentes conceptos y recursos para representar, explorar y resolver el problema. El último episodio es el de *Integración*, en el cual se analizan los diferentes acercamientos, los argumentos que apoyan las estrategias usadas y las justificaciones de las conjeturas generadas durante las exploraciones Este marco permitió estructurar y guiar el diseño y análisis de las actividades de manera que promovieran el desarrollo del pensamiento matemático.

Metodología

La investigación que se presenta es de naturaleza cualitativa. Las actividades fueron implementadas con ocho profesores de matemáticas de bachillerato dentro del curso de Educación Matemática y Nuevas Tecnologías en el primer semestre de un programa de maestría en Matemática Educativa. Respecto a la experiencia con el uso de tecnologías digitales, únicamente tres de ellos contaban con experiencia en el manejo de GeoGebra como graficador. Se diseñaron cinco actividades que involucraban problemas que promovían el desarrollo de las Grandes Ideas sobre Funciones propuestas por Cooney et al. (2010). Las actividades se trabajaron durante diez sesiones con una duración de tres horas cada una. En un primer momento, los profesores trabajaron de manera individual en la solución de los problemas; después, los participantes exponían frente al grupo los avances de las diferentes rutas de solución, las conjeturas formuladas y los resultados encontrados, además de sus pruebas o justificaciones respectivas.

En este artículo se presenta la Actividad 2 “Problema del Rectángulo”. El objetivo era abordar un problema que involucrara el estudio de una función cuadrática y se analizaran las grandes ideas de: concepto de función, covariación y tasa de cambio, familia de funciones y sus múltiples representaciones. El problema propuesto fue: $ABCD$ es un rectángulo. $\overline{AB}$ tiene una longitud de 6.5 cm, $\overline{BC}$ mide 4 cm. M es un punto sobre el segmento $\overline{AB}$, N es un punto sobre el segmento $\overline{BC}$, P es un punto sobre el segmento $\overline{CD}$ y Q es un punto sobre el segmento $\overline{DA}$. Además, se tiene que $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ}$. ¿Dónde debe ubicarse el punto M para que el cuadrilátero $MNPQ$ tenga la mínima área posible? (Santos-Trigo, Camacho-Machín, & Olvera-Martínez, 2014). Con la finalidad de orientar la solución del problema, se diseñó una hoja de trabajo donde se plantearon preguntas que promovieran el análisis de los conceptos y objetos matemáticos involucrados y los profesores desarrollaran dos tipos de acercamientos hacia la solución del problema: dinámico y algebraico.

La recolección de datos se llevó a cabo mediante reportes escritos a mano o en procesador de texto donde cada uno de los profesores mostraba las estrategias de solución al problema que desarrolló; archivos de GeoGebra con las construcciones del modelo dinámico que representa al problema realizadas por los participantes; videograbaciones de las discusiones grupales generadas en las sesiones de trabajo; entrevistas no estructuradas a todos los profesores, las cuales se efectuaron para aclarar o profundizar las ideas y estrategias desarrolladas por los participantes y así corroborar o ampliar la interpretación que la investigadora había hecho de sus respuestas; y notas de campo que la investigadora registró en cada sesión.

Análisis y discusión de los resultados

Los principales resultados obtenidos en este estudio, se presentarán de acuerdo a los episodios propuestos por Santos- Trigo y Camacho-Machín (2011). Se hará un mayor énfasis en el episodio de Integración, donde se aborda la importancia de conocer el dominio de una función.

Comprensión del problema

Antes de iniciar con algún acercamiento hacia la solución, se les cuestionó a los profesores sobre ¿Qué es un rectángulo? ¿De qué manera se puede dibujar un rectángulo? ¿Cómo se puede construir el cuadrilátero inscrito? Con la finalidad de que identificaran las propiedades de estos objetos geométricos y con base en esa información lograran construir el modelo dinámico que representa al problema en GeoGebra. Todos los participantes elaboraron la construcción dinámica correspondiente. El procedimiento que siguieron fue ubicar el punto M sobre el segmento AB. Para localizar los puntos N, P y Q trazaron circunferencias de radio igual a la longitud del segmento $\overline{AM}$ con centro en los puntos B, C y D, y encontraron sus intersecciones con el rectángulo $ABCD$ (Figura 1).

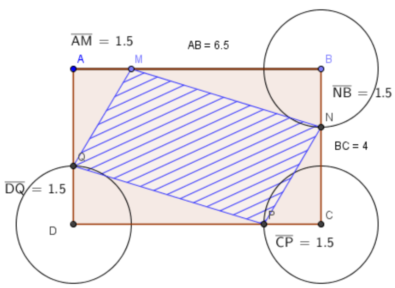


Figura 1. Modelo dinámico que representa el problema.

La construcción del modelo dinámico permitió que los profesores construyeran significados de objetos matemáticos. Trazar el rectángulo en GeoGebra, implicó un análisis de sus propiedades geométricas para decidir qué objetos matemáticos eran necesarios para construirlo y asegurar que se mantuvieran estas propiedades aun cuando se modifican las dimensiones de sus lados. Las estrategias de construcción evidenciaron las formas en que los profesores pensaron las propiedades de los objetos involucrados en términos de los comandos de GeoGebra. Por ejemplo, trazar perpendiculares o rotar 90° un segmento de recta para construir el ángulo recto que se forma entre los lados del rectángulo, usar circunferencias de igual radio con la finalidad de conservar distancias iguales entre dos puntos.

Exploración del problema

Una vez que los profesores construyeron el modelo dinámico, exploraron qué sucedía cuando se movía el punto M. Con la finalidad de que los profesores identificaran las características del objeto geométrico construido, en la hoja de trabajo se les plantearon las preguntas: ¿qué propiedades conserva la familia de cuadriláteros que se generan? ¿Se puede decir que el cuadrilátero $MNPQ$ es un paralelogramo? ¿Por qué? Todos los profesores identificaron que los triángulos AMQ y CPN eran congruentes, de la misma manera que BNM y DQP. Siete profesores concluyeron que el cuadrilátero $MNPQ$ es un paralelogramo, argumentando que lados opuestos tienen la misma longitud.

Como resultado de mover el punto M, los profesores observaron que: a) cuando el punto M se aproximaba al punto A, el cuadrilátero $MNPQ$ tendía a coincidir con el rectángulo $ABCD$; b) cuando el punto M se acercaba al punto B, de la misma manera lo hacía el punto N, hacia C, por las condiciones del problema y; c) dado que la longitud del segmento $\overline{BC}$ es de 4 cm, la longitud mayor que puede tener el segmento $\overline{AM}$ es de 4 cm (Figura 2). Así, la longitud del segmento $\overline{AM}$ debe estar en un intervalo de $[0,4]$.

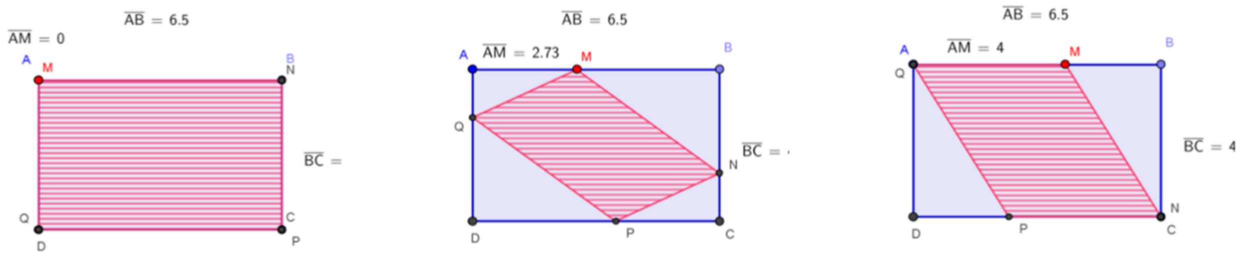


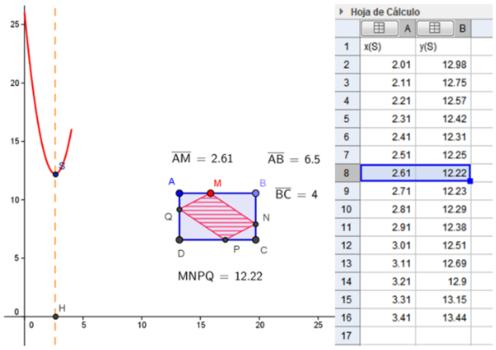
Figura 2. Diferentes posiciones del punto M.

Durante este episodio, el uso de GeoGebra ofreció la posibilidad de analizar ideas matemáticas como la variación. Al mover el punto M, los profesores observaron que el área de $MNPQ$ variaba, identificaron las variables involucradas y su relación de dependencia: a cada valor de la variable independiente (longitud del segmento $\overline{AM}$) le corresponde uno y sólo un valor de la variable dependiente (área del cuadrilátero $MNPQ$). Así, los profesores comenzaron a reconocer características relevantes del concepto de función como la unicidad.

Diferentes aproximaciones hacia la solución del problema

En este episodio, los profesores analizaron la relación identificada entre las variables a través de diferentes representaciones, lo que generó el desarrollo de diferentes acercamientos hacia la solución del problema. De manera inicial, todos los profesores hicieron una aproximación visual o empírica, observaron que cuando la longitud del segmento $\overline{AM}$ crece, el área del cuadrilátero $MNPQ$ disminuye hasta llegar a un valor mínimo y después, comienza a crecer nuevamente. Esto les permitió ubicar de manera aproximada la posición del punto M en donde se alcanza el área mínima de $MNPQ$. Los resultados reportados por los profesores se encontraban entre $2.61, 2.62\ y\ 2.63\ cm$ para la longitud de $\overline{AM}$, y 12.22 cm^2 aproximadamente como área de $MNPQ$. Debido a que los profesores habían identificado que las variables involucradas variaban conjuntamente, decidieron explorar la representación gráfica a través del lugar geométrico descrito por un punto con coordenadas $(longitud\ de\ \overline{AM}, área\ de\ MNPQ)$, del cual encontraron el lugar geométrico que describe cuando se mueve el punto M. En la Figura 3, se muestra cómo de manera visual encontraron la solución al problema al colocar el punto que genera el lugar geométrico sobre el punto mínimo. Cinco profesores complementaron su aproximación empírica con una tabla que relacionaba la longitud del segmento $\overline{AM}$ y el área de $MNPQ$ correspondiente e identificaron el valor mínimo del área de $MNPQ$ (Figura 3).

En el acercamiento algebraico, los profesores encontraron una expresión del área de $MNPQ$, en términos de la longitud del segmento $\overline{AM}$. Restaron el área de los cuatro triángulos de las esquinas del área del rectángulo $ABCD$, y obtuvieron: $f(x) = 26 - 10.5x + 2x^2$. Para calcular el valor mínimo de esa función, recurrieron a procesos propios del cálculo y encontraron que cuando $x = 2.625$, se obtiene un área mínima de 12.22 cm^2. Los profesores observaron que los valores obtenidos en los acercamientos dinámicos eran una aproximación cercana a los valores encontrados con el modelo algebraico Posteriormente, los profesores investigaron qué sucedía cuando a y b eran las dimensiones del rectángulo inicial. Encontraron que cuando $x = \frac{a+b}{4}$ se obtiene el área mínima de $MNPQ$, es decir, cuando la longitud del segmento $\overline{AM}$ es una cuarta parte del semiperímetro del rectángulo $ABCD$.



	A	B
1	x(S)	y(S)
2	2.01	12.98
3	2.11	12.75
4	2.21	12.57
5	2.31	12.42
6	2.41	12.31
7	2.51	12.25
8	2.61	12.22
9	2.71	12.23
10	2.81	12.29
11	2.91	12.38
12	3.01	12.51
13	3.11	12.69
14	3.21	12.9
15	3.31	13.15
16	3.41	13.44
17		

Figura 3. Aproximación empírica reportada una participante.

El uso múltiples representaciones de una función se vio ampliamente favorecido por el uso de GeoGebra. Los profesores reconocieron que las funciones pueden ser representadas en múltiples formas: algebraica, gráfica, tabular, numérica y verbal. Por ejemplo, cuando construyeron la expresión algebraica reconocieron que se trataba de una función cuadrática y corroboraron la conjetura de que el lugar geométrico que habían obtenido en GeoGebra, era una parábola. La posibilidad que brinda GeoGebra de contar, en una misma ventana, con diferentes representaciones permitió que los participantes establecieran vínculos y conexiones entre las representaciones.

Integración

En el episodio de integración se pidió a los profesores explorar qué sucede si el cuadrilátero $MNPQ$ se inscribe en un paralelogramo conservando las mismas condiciones del problema. Esta extensión del problema inicial tuvo como finalidad observar qué propiedades y resultados se mantenían. Los profesores realizaron una aproximación visual o empírica, de manera similar a la del caso inicial y únicamente tres profesores plantearon el modelo algebraico considerando que las dimensiones de los lados del paralelogramo eran a y b, y el ángulo formado entre ellos sea α. El resultado que obtuvieron les permitió concluir que, independientemente de las dimensiones de los lados del paralelogramo y del ángulo formado entre ellos, siempre se conservaría que el valor mínimo del área de $MNPQ$ se alcanza cuando la longitud del segmento sea $\frac{a+b}{4}$.

Con la finalidad de que los profesores corroboraran si la fórmula que habían encontrado para calcular la longitud del segmento $\overline{AM}$ en la cual se alcanza el área mínima era aplicable para cualesquiera dimensiones, durante la discusión grupal se promovió la exploración de casos particulares considerando diferentes longitudes de los segmentos y manteniendo fijo el ángulo formado entre ellos. Se retomó la construcción de un profesor que contaba con deslizadores para controlar las dimensiones de los segmentos. Se mantuvo fija la medida del ángulo α y del segmento $\overline{BC}$ (deslizador b), sólo variaba la longitud del segmento $\overline{AB}$ (deslizador a). Al explorar ejemplos particulares, encontraron que el lugar geométrico cambiaba (Figura 4).

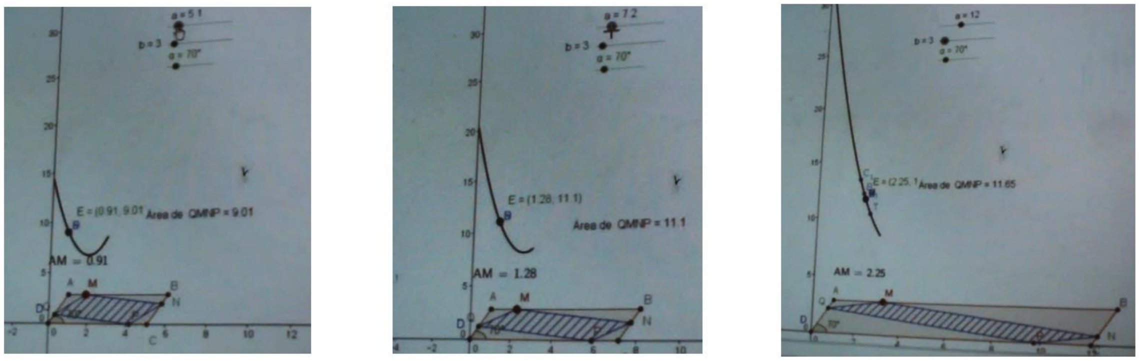


Figura 4. Lugares geométricos encontrados al variar el deslizador a.

Estas observaciones llevaron a los profesores a investigar el valor mínimo en cada lugar geométrico. Una profesora señaló que en las dos primeras imágenes de la Figura 4, el valor mínimo parece estar en el vértice de la parábola asociada mientras que, en la imagen de la derecha, el lugar geométrico no llega al vértice por lo que el valor mínimo corresponde al extremo derecho. Esta conjetura, generó que los profesores recordaran el dominio de la función en el problema. El segmento $\overline{BC}$ fue considerado el de menor longitud, por lo tanto, el dominio de la longitud del segmento $\overline{AM}$ era [0, b]. Después de analizar casos particulares, todos los profesores identificaron dos situaciones: (1) la fórmula es aplicable cuando el vértice de la parábola asociada se encuentra dentro del dominio de la función del problema, (2) cuando el vértice de la parábola asociada está fuera de ese dominio, el valor mínimo del área de $MNPQ$ está en el extremo del lugar geométrico, cuando $x = b$, siendo b la medida del segmento menor.

Los profesores encontraron que cuando el vértice de la parábola asociada y el extremo derecho del lugar geométrico coinciden, se cumple que $b = \frac{a+b}{4}$, por lo tanto, $a = 3b$. Considerando que b es la medida del segmento menor, se tiene que: 1) cuando $a = 3b$, el área mínima de $MNPQ$ se alcanza en $x = b$, o en $x = \frac{a+b}{4}$; 2) cuando $a > 3b$, el área mínima de $MNPQ$ se obtiene en $x = b$ y; 3) cuando $a < 3b$, el área mínima de $MNPQ$ está en $x = \frac{a+b}{4}$. Los profesores concluyeron que es necesario conocer las dimensiones del paralelogramo y el dominio de la función para encontrar la posición del punto M donde el valor de la función es mínimo.

La posibilidad de mover puntos y rectas en las construcciones dinámicas, favoreció la exploración de relaciones o invariantes entre los objetos matemáticos. El uso de deslizadores para variar las dimensiones de los lados del paralelogramo inicial permitió el análisis de la importancia del dominio de las funciones. Los profesores reconocieron que las restricciones en el dominio de una función pueden hacer no válidos aquellos resultados que fueron obtenidos de manera general sin tomar en cuenta el dominio de la función del problema en particular.

Conclusiones

El NCTM (2009) argumenta que el razonamiento en matemáticas a menudo comienza con la exploración, luego la generación de conjeturas, posibles inicios falsos y las explicaciones parciales antes de que se obtenga el resultado final. En este contexto y con base en los resultados, es posible argumentar que el uso de GeoGebra, como amplificador y reorganizador cognitivo, favoreció que los profesores desarrollaran diferentes formas de razonamiento. Como amplificador, las construcciones de los modelos dinámicos y las exploraciones mediante el arrastre de objetos geométricos permitieron que los profesores observaran relaciones, patrones de comportamiento e invariantes entre dichos objetos. Esto ofreció elementos para sustentar o rechazar las intuiciones iniciales del problema. El uso de GeoGebra, como reorganizador cognitivo, generó que los profesores razonaran los problemas en términos de los comandos que ofrece la herramienta. Además, favoreció el desarrollo de estrategias de solución del problema sin necesidad de establecer explícitamente expresiones algebraicas que modelaran el problema. Por ejemplo, los participantes reconocieron que la gráfica trazada en GeoGebra proporcionó información visual que contrastaron con el modelo algebraico correspondiente. Los profesores exhibieron una forma de razonar que reflejaba un tránsito de lo empírico a lo formal. El uso de GeoGebra fue crucial para conciliar los acercamientos visuales o geométricos con argumentos algebraicos para justificar las conjeturas formuladas por los profesores.

Referencias y bibliografía

Common Core State Standards Initiative (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington D.C.: National Governors Association Center for Best Practices, Council of Chief State School Officers.

Confrey, J. & Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations. En R. Underhill & C. Brown (Eds.), Proceedings of the 13th Annual Meeting of PME-NA (pp. 57-63). Blacksburg, VA.

Cooney, T., Beckmann, S., & Lloyd, G. (2010). *Developing essential understanding of functions for teaching mathematics in Grades 9-12*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dick, T. P. & Hollebrands, K. F. (2011). *Focus in high school mathematics: Technology to support reasoning and sense making*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Koehler, M. J. & P. Mishra (2009). What is technological pedagogical content knowledge? Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 9(1), 60-70.

Moreno-Armella, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 81-86). Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

National Council of Teacher of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teacher of Mathematics (2008). *The role of technology in the teaching and learning of mathematics. a position of the National Council of Teachers of Mathematics.* Recuperado de http://www.nctm.org/uploadedFiles/About_NCTM/Position_Statements/Technology%20final.pdf

National Council of Teacher of Mathematics (2009). *Focus in High School Mathematics: Reasoning.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Niss, M. A. (2014). Functions Learning and Teaching. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 238-241). London: Springer.

Santos-Trigo, M. & Camacho-Machín, M. (2011). Framing a problem solving approach based on the use of computational tools to develop mathematical thinking. En M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Conference of the European society for Research in Mathematics Education* (pp. 2258-2277). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

Santos-Trigo, M., Camacho-Machín, M., & Olvera-Martínez, C. (2014). Preservice high school teachers' construction and exploration of dynamic models of variation phenomena. En S. Carreira, N. Amado, K. Jones, & H. Jacinto (Eds.), *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, creativity and affect in mathematical problem solving* (pp. 96-107). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.