II CEMACYC
II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
29 octubre al 1 noviembre. 2017
Cali, Colombia
REDUMATE
ii.cemacyc.org

Comprensión en el proceso de solución de una ecuación diferencial.

Diego Antonio **Rolong** Molinares
Universidad de Antioquia
Colombia
diego.rolong@udea.edu.co
René Alejandro **Londoño** Cano
Universidad de Antioquia
Colombia
rene.londono@udea.edu.co
Carlos Mario **Jaramillo** López
Universidad de Antioquia
Colombia
carlos.jaramillo1@udea.edu.co

Resumen.

La ponencia busca la divulgación de una investigación doctoral que analiza la comprensión que subyace en el proceso de solución de una ecuación diferencial inherente al fenómeno de la variación, en el marco de la Teoría de Pirie y Kieren; para desarrollar esta investigación se elegirán estudiantes matriculados en un curso regular de Ecuaciones Diferenciales de un programa de ingeniería. La recolección de la información se hará a través de la observación, el análisis de los documentos escritos por los participantes y una entrevista semiestructurada de carácter socrático, enmarcadas en actividades que involucren la complementariedad de la acción y expresión, con el fin de describir el fenómeno en los estratos de comprensión de la teoría antes mencionada.

Palabras clave: Comprensión, variación, razón de cambio, ecuaciones diferenciales, integral.

Antecedentes.

En los cursos regulares de Ecuaciones Diferenciales (ED) que se imparten para programas de ingeniería, se observa que los estudiantes presentan dificultades en el proceso de obtención y análisis de la solución de una ecuación diferencial, por lo tanto, esto motiva a indagar sobre estudios o experiencias llevadas a cabo que permitan establecer qué tipo de razonamiento o comprensión de conceptos debe exhibir el estudiante para lograr que brinde respuestas acertadas al respecto de la solución presentada y poder describir el fenómeno de aprendizaje, comprensión o razonamiento que debe enfrentar en este mismo proceso de solución.

Analizar fenómenos en el campo del aprendizaje de las matemáticas es un reto para la comunidad de profesores e investigadores, específicamente los relacionados con la comprensión o razonamiento de conceptos matemáticos que, si bien se perciben, se dificulta su descripción. Al respecto, Cantoral (2004) considera que:

> …el pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de la enseñanza y aprendizaje de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo del medio social que los acepta, la expresión cambio, es la modificación del estado de un cuerpo, de una variable, en tanto que el vocablo variación es la medida de dicho cambio (p. 45).

Se dice que "una persona emplea pensamiento variacional cuando recurre a ideas, técnicas o explica un cambio cualitativo o cuantitativo de un sistema, de un objeto, de una variable, en el análisis de un fenómeno" (Cantoral; Molina; Sánchez, 2005, p. 464).

Indagando la literatura relacionada con procesos de variación, se encuentran estudios que han desarrollado propuestas innovadoras dirigidas a estudiantes y profesores, empleando teorías, modelos y diseños de estrategias metodológicas que contribuyen al razonamiento y la comprensión de conceptos matemáticos, con el fin de superar las dificultades que se presentan durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de dichos conceptos. Entre las investigaciones identificadas se encuentran:

1. La relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren (Londoño, 2011): esta investigación muestra la comprensión del teorema fundamental del cálculo a través de actividades enmarcadas en los estratos de compresión de la teoría de Pirie y Kieren, empleando como mecanismo el folding back, el cual es quizás el fenómeno más relevante para dicha teoría.
2. Comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada (Villa-Ochoa, 2011): este estudio muestra la comprensión de la tasa de variación como una manera de aproximarse al concepto de derivada desde una perspectiva variacional en el marco de la teoría Pirie y Kieren.

El concepto de derivada desde una mirada variacional.

La derivada surge como una herramienta para estudiar el cambio que realiza una variable con respecto a otra y su uso en el cálculo diferencial es imprescindible, como también lo es interpretar su significado y predecir el comportamiento de los fenómenos en la solución de problemas de la vida real. Además, el asunto de la variación es objeto de interés de muchos investigadores, entre los que se encuentra Dolores (citado por Cantoral, 2004), quien con respecto a los cursos de cálculo diferencial afirma que:

> …se dedica mucho tiempo a la enseñanza de algoritmos en los que se emplean técnicas de derivación dejando a un lado las ideas esenciales sobre la derivada, no se presta atención a las ideas variacionales tan necesarias para el uso y comprensión de este concepto (p. 22).

Los estudiantes después de cursar las asignaturas de cálculo diferencial e integral, al parecer no comprenden favorablemente los conceptos. En este sentido, Cantoral (2004) manifiesta que es importante tener en cuenta:

> …la necesidad de usar estrategias que permitan desde un inicio romper con los esquemas y las formas algebraicas con las que se trata el concepto de derivada, para lograr la manifestación de las ideas de cambio y de variación, además, si el interés es el aprendizaje de los conceptos de función, límite, continuidad, derivada e integral, no se puede reducir la enseñanza de estos conceptos a su definición, como tampoco, limitarla a aplicaciones en diferentes contextos (p. 23).

Por su parte, Sealey y Flores (2005) mencionan que "para que el estudiante logre una comprensión avanzada de la derivada, es necesario que se aborde este concepto como función, como razón de cambio y como límite" (pp. 175-196). Además, ellos propusieron diferentes estrategias de enseñanza para cada nivel y discutieron obstáculos que se pueden presentar en la mente de los estudiantes. También, afirman que "es importante para la comprensión de los estudiantes, que ellos puedan relacionar la derivada con otros conceptos, como es la razón de cambio de la función que da el área bajo una curva" (pp. 175-196), entre otros.

El concepto de integral desde una mirada variacional.

El concepto de integral en su proceso de construcción, se originó de diversas formas entre las que se encuentran: hallar la cantidad fluente (antiderivada) de una fluxión (derivada) dada, que es una expresión elaborada por Newton; por su parte, Leibniz la expresó así: la integral es una suma de la diferencia entre dos estados de una cantidad (Aranda, 2015). Y finalmente, se le atribuye a los Bernoulli la interpretación operación inversa a la diferenciación. Así, puede observarse como el concepto de variación es inherente al concepto de integración desde sus inicios.

Las Ecuaciones diferenciales desde una mirada variacional.

El cálculo diferencial en sus intentos por resolver problemas físicos, se constituye gradualmente en una nueva rama de las ciencias que a finales del siglo XVIII logra independizarse y constituirse como las ecuaciones diferenciales con un conjunto de soluciones propias.

De acuerdo con investigaciones realizadas en relación a la enseñanza de las ED, especialmente las desarrolladas por Artigue & Rogalski (1990), Artigue (1992) y Artigue (1994), es posible comprobar algunas de las conclusiones a las que llegan de manera empírica profesores de cursos de ED, cuando afirman que en las soluciones dadas por estudiantes de estos cursos, predomina una tendencia en el contexto algebraico de la resolución exacta, más que en el contexto numérico de la resolución aproximada y que en el contexto geométrico de la resolución cualitativa, reconociendo que se ha dado prioridad a una visión limitada y falsa, haciendo énfasis tan sólo en el primer contexto mencionado.

En este sentido, la presente investigación en curso trata de dilucidar que, al restringirse la solución de una ED al trabajo del contexto algebraico, se deja de lado la conceptualización y comprensión del proceso de variación que se encuentra implícito en el cálculo de la antiderivada respectiva, lo que genera una limitación en la generación de nuevas situaciones o el planteamiento de nuevos métodos o estrategias de solución.

Justificación del problema de investigación.

El presente estudio aborda de manera indirecta conceptos que subyacen al de ecuación diferencial, tales como: función, gráfica de una función, razón de cambio, variación, derivada, integración, entre otros, que involucran un razonamiento conceptual, con el propósito de determinar cuál es la comprensión exhibida por el estudiante de estos conocimientos básicos, y así, poder analizar la comprensión en el proceso de solución de una ED de primer orden; para lograrlo, es necesario diseñar un conjunto de actividades enmarcadas en las complementariedades de la acción y la expresión en el marco de la teoría de Pirie y Kieren, que permitan, mediante una entrevista semiestructurada de carácter socrático, lograr una descripción y un análisis del fenómeno de comprensión que ocurre en dicho proceso de solución, en el que interviene el concepto de variación que está ligado a interpretaciones tales como: una diferencia de áreas, una familia de funciones, entre otras.

En los cursos de cálculo diferencial, cálculo integral y ecuaciones diferenciales, es posible observar que la teoría se desarrolla mediante estrategias y metodologías que hasta el momento, al parecer, le funcionan al profesor, en tanto que son usadas en la solución de ejercicios modelo[1] y, a la vez, se aplican procedimientos y algoritmos a problemas en los que se debe determinar una función como solución, solicitando hallar la derivada de la función conocida; por su parte, los estudiantes hallan la derivada empleando las técnicas de derivación, en tanto que presumiblemente, tienen la tendencia de interpretar la derivada solo como una función y no como la medida de cambio de una variable con respecto a otra, es decir, una razón de cambio.

De otro lado, en cursos de cálculo integral las actividades están dirigidas para hallar la antiderivada, dado que los estudiantes tratan de interpretar el resultado como una función y no como el proceso inverso a la razón de cambio. Esta situación no es ajena en un curso de ED, ya que los estudiantes abordan la solución de una ED en forma mecánica. Es importante destacar que, si bien el proceso de variación al encontrar una derivada y el proceso de variación al encontrar una antiderivada son de distinta naturaleza, ambos están estrechamente ligados en la solución de una ED y el estudiante los interpreta como un proceso mecánico aislado de otros conceptos que subyacen a él.

En el transcurso de la indagación de la literatura, abunda poca que permita entrever y precisar la descripción de los procesos de variación subyacentes a la solución de un ED, lo que permite de alguna manera respaldar la pertinencia de la presente investigación.

Con los hechos planteados se hace necesaria la búsqueda de estrategias metodológicas que permitan describir la compresión del fenómeno de variación subyacente en el proceso de solución de una ED. Por lo tanto, el problema que se pretende abordar está directamente relacionado con la dificultad que presentan los estudiantes para comprender la solución de una ED y poder contrarrestar la idea de que la solución se reduce solamente a realizar el proceso memorístico, mecánico y operativo, en el que se halla una anti derivada.

Pregunta de investigación.

¿De qué manera comprenden los estudiantes el proceso de solución de una ED?

---

[1] En este contexto, la palabra modelo se refiere a ejercicios que sirven como base para la solución de otros, que tienen estructura o procedimientos de solución análogos.

Objetivo.

Analizar la comprensión de los estudiantes cuando abordan el proceso de solución de una ED en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.

Teoría para el crecimiento de la comprensión matemática de Pirie y Kieren.

La teoría para el crecimiento de la comprensión matemática de Pirie y Kieren tiene sus orígenes en un enfoque constructivista de Von Glasersfeld. Con base en esta definición, Pirie y Kieren llegan a considerar la comprensión como un todo dinámico, estratificado, recursivo, no lineal y jerarquizado de una reorganización de las estructuras del conocimiento. Lo dinámico de la teoría hace referencia a lo creciente e inacabada de la misma, ésta teoría se constituyó a partir del concepto de comprensión y actúa como una lente a través de la cual puede observarse en un individuo o un grupo individuos el crecimiento de la compresión matemática y, a la vez, la teoría establece un modelo que grada la comprensión, representado por ocho elipses con un punto en común, cada elipse representa un estrato y está contenida una dentro de la otra.

Estratos de comprensión.

Son ocho estratos que están distribuidos así:

Estrato 1: Primitive Knowing (Conocimiento primitivo). Hace referencia al conocimiento inicial, primordial o básico. Este conocimiento está conformado por todo lo que una persona trae en su mente a la hora de realizar una tarea. El adjetivo primitivo no califica a este conocimiento como precario o en un estrato matemático bajo.

Estrato 2: Image Making (Construcción de la Imagen). La construcción de “la imagen de un concepto se genera cuando se realizan representaciones mentales o físicas con el fin de recrear una idea del nuevo tema o concepto” (Thom & Pirie, 2006, p. 189). En la presente investigación se tratará de dilucidar la construcción de nuevas imágenes matemáticas en forma mental, verbal o escrita.

Estrato 3 Image Having (Comprensión de la Imagen). El estudiante es capaz de comprender la imagen; al respecto, Pirie y Kieren (citado por Meel, 2003) afirman que “las imágenes asociadas con una sola actividad se reemplazan por una imagen mental, el desarrollo de estas imágenes mentales, libera las matemáticas del estudiante” p. 337). Para el presente estudio, en este estrato se espera que los estudiantes sean capaces de reconocer que una razón de cambio se puede expresar de diferentes formas.

Estrato 4: Property Noticing (Observación de la propiedad). Una vez que el estudiante haya construido varias imágenes, puede examinarlas, establecer conexiones y distinciones entre ellas. En palabras de Tom & Pirie (2006) “es una forma de caminar atrás[2] y reflexionar sobre la comprensión existente a fin de promover esa comprensión” (p. 190). Así que, se espera que los estudiantes estén en capacidad de desarrollar un concepto-definición, creado a partir de la interacción entre las diversas imágenes vinculadas, en vez de tener imágenes desconectadas.

Estrato 5: Formalising (Formalización). El proceso de identificar las propiedades de una imagen, permite extraer sus características y relacionarlas para construir una clasificación de las imágenes.

[2]Se utiliza el término “caminar atrás” como una interpretación del término “folding back” presentada por los autores en el texto original en inglés.

Estrato 6: Observing (Observación). Implica reflexionar sobre la coordinación de unas actividades de matemáticas formales. Tom & Pirie (2006) presentan una analogía entre los estratos, así: "Observing is to Formalising as Property Noticing is to Image Having" (p. 190). Por lo tanto, los estudiantes poseen la habilidad de reflexionar y revisar su razonamiento.

Estrato 7: Structuring. (Estructuración). Involucra la capacidad de explicar o generar teoría sobre las observaciones formales en un contexto lógico, en el cual se emplea un sistema axiomático y se incluye en una estructura matemática (Tom y Pirie 2006, p. 194).

Estrato 8. Inventising (Invención). Retomando los planteamientos de Tom & Pirie (2006, p. 194) la *Invención* requiere por parte de los estudiantes que rompa con las preconcepciones que surgieron en la comprensión temprana con el fin de plantear nuevas preguntas que pueden dar lugar al crecimiento de un concepto totalmente diferente. Luego, se espera que los estudiantes sean capaces de plantear preguntas que tengan como resultado la concepción de nuevos conceptos.

Desde la definición de comprensión presentada anteriormente, Pirie & Kieren plantean un modelo dinámico que se refleja en sus diversos componentes. Los estratos externos se insertan y envuelven a los internos.

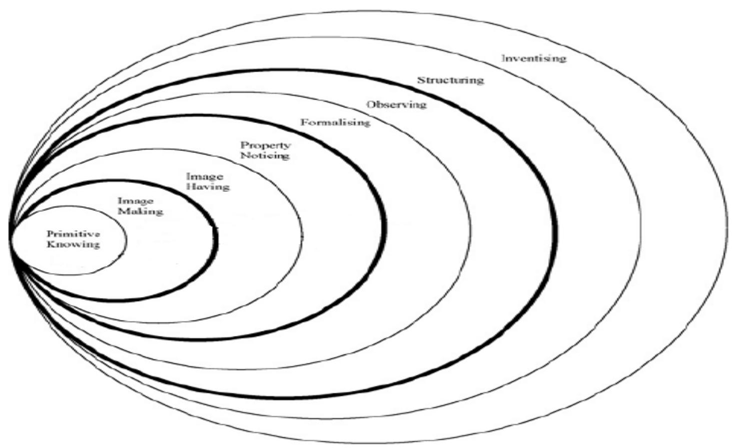

Figura 1. Estratos del crecimiento de la comprensión matemática de la teoría (Pirie y Kieren. 1994, p. 167).

Diseño metodológico.

Teniendo en cuenta la complejidad que caracteriza a las investigaciones en Educación Matemática, se considera favorable para analizar la comprensión de los estudiantes cuando abordan el proceso de solución de una ED en el marco de la teoría de Pirie y Kieren, un enfoque cualitativo, que de acuerdo con Hernández Sampieri, Fernández y Baptista (2006) permite lograr una perspectiva coherente del análisis del fenómeno. La recolección de la información para el análisis se hará a través de las actividades enmarcadas en la complementariedad de la acción y la expresión, de una entrevista semi estructurada de carácter socrático y de la revisión de los escritos generados por los estudiantes, para buscar una posible respuesta a la pregunta de investigación y la obtención del objetivo general.

De otro lado, se ha elegido el método de casos para analizar la comprensión de los estudiantes del objeto matemático ya mencionado, los casos serán identificados en función de la comprensión que los estudiantes describen en los primeros cuatro estratos de la teoría de Pirie y

Kieren cuando aplican el conocimiento construido y lo comunican en el contexto de las complementariedades de la acción y la expresión. Dado que la investigación se encuentra en curso y ad portas del trabajo de campo, se proyecta que la comprensión en el estrato 1 esté asociada a conocimientos iniciales relacionados con los conceptos de función, área bajo una curva y pendiente; en el estrato 2 esté asociada a los conceptos de recta tangente y derivada; en el estrato 3 esté asociada con los conceptos de función de acumulación de áreas, familias de funciones e integral y, finalmente, en el estrato 4 esté asociada a los conceptos de diferencial y ED. Es posible que emerjan otros elementos conceptuales para cada estrato en el trabajo de campo que no hayan sido aquí considerados. De esta manera, los casos estarán determinados por el estrato alcanzado por los estudiantes, después de analizar las actuaciones y expresiones de los estudiantes conforme transcurran las preguntas de la entrevista socrática.

Cada caso será descrito a manera de episodios, en los que se registre las actuaciones, las expresiones y los momentos de foldinkg back, características de la teoría que serán fundamentales para analizar posibles avances de comprensión. Se presenta a continuación algunas preguntas de los primeros cuatro estratos, que permitirán dilucidar la comprensión de los conceptos involucrados en la solución de una ED:

Estrato 1: Dadas varias rectas en el plano, ¿podrías describir una estrategia para identificar la de mayor y menor pendiente?; Dadas varias regiones acotadas, ¿podrías describir una estrategia para calcular el área de cada una?

Estrato 2: Dada la función $y = x^2$, ¿Qué interpretaciones podría tener la expresión $\frac{dy}{dx} = 2x$?; Dada la gráfica de una función derivada $f'(x)$, ¿podrías señalar las características de la función $f(x)$?

Estrato 3: Considera las gráficas de la funciones $f(x) = x^2$ y $f'(x) = 2x$, y los puntos del plano para cada una en la abscisa $x = 3$. ¿Observas alguna relación entre la pendiente de la recta tangente a la curva de $f(x) = x^2$ y la ordenada de $f'(x) = 2x$ en $x = 3$?; ¿observas alguna relación entre la ordenada $f(x) = x^2$ en $x = 3$ y el área encerrada por $f'(x) = 2x$, el eje x y la recta $x = 3$? Analiza y responde las preguntas anteriores para las abscisas $x = 2$, $x = 4$ y $x = 5$.

Estrato 4: Considera la siguiente secuencia de igualdades:

$$\frac{dy}{dx} = m \to dy = mdx \to \int dy = m\int dx \to y = mx + C$$ y las gráficas de las funciones $f(x) = mx + C$ y $f'(x) = m$. ¿Qué puedes decir al comparar para una misma abscisa x la pendiente de la recta tangente de $f(x)$ con la ordenada de $f'(x)$?, y ¿si comparamos la ordenada de $f(x)$ con el área encerrada por $f'(x)$, la misma abscisa elegida y los ejes coordenados?

Resultados esperados.

Al llevar a cabo esta investigación, se espera describir y analizar cómo comprenden los estudiantes el proceso de solución de una ED en el marco de la teoría de Pirie y Kieren, mediante las respuestas dadas en función de las preguntas de la entrevista socrática y, los momentos de folding back, serán características claves para detectar los avances en la comprensión de los conceptos involucrados. Es importante resaltar que el análisis de la comprensión que se desea llevar a cabo, se consolide como estrategia metodológica que permita que un estudiante sea consciente de la red conceptual que allí se involucra, dejando a un lado el proceso mecánico, operativo y algorítmico. Así mismo, durante el proceso surgirán nuevos elementos, que pueden ser insumos para analizar la comprensión en el proceso de solución de una ED en los estratos 5 y siguientes, en el marco de la teoría de Pirie y Kieren.

Referencias y bibliografía.

Aranda, L.M. (2015). *Análisis de la construcción del concepto de integral definida en estudiantes de bachillerato*. Tesis doctoral publicada, Universidad Alicante España.

Artigue, M., & Rogalski, M. (1990). Enseigner autrement les équations différentielles en DEUG. En *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG SSM première année,* 113-128, IREM de Lyo

Artigue, M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices. En *The concept of Function: Some aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes, N°25*.

Artigue, M. (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. En Bielher & al. (Eds.). *Didactics of mathematics as a scientific discipline*, 27-39. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Cantoral, R. (2004). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Una mirada socio epistemológica*. Actas Latinoamerica de Matemática Educativa.*17*, pp. 1-9. México D.F.: Clame.

Cantoral, R., Molina, J.;Sánchez, M. (2005). Socioepistemoligía de la predicción. In Lezama, J.; Sánchez. y Molina, J. (ED). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Mexico; Comité latinoamericano de Matemática Educativa, p. 463-468.

Dolores, C. (2013). *La variación y la derivada*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación.* México: Mc Graw Hill.

Kieren, T. (1990). Understanding for teaching for understanding. *The Alberta Journal of Educational Research*, *36* (3), 191-201.

Londoño, C. R. (2011). *Relación inversa entre cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie-Kieren*. Tesis doctoral publicada, Universidad de Antioquia Colombia.

Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento dela comprensión matemática y la teoría de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 6* (2003), 221-278.

Pirie, S. E., & Kieren, T. E. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, *26* (2/3), 165-190.

Pirie, S., & Thom, J. (2006). *Looking at the complexity of two young children's understanding of number*. *Journal of Mathematical Behavior, v25 n3 p185-195 2006*, *25* (3), 185-195.

Sealey, V. y Flores, A. (2005). Entender la derivada: sí se puede. En J. Cortés y F. Hitt (Eds.). *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* (pp. 175-196). México: Morevallado Editores

Thom, J. S., & Pirie, S. E. (2006). Looking at the complexity of two young children's understanding of number. *Jounal of mathematical Behavior, 25*, 185-195.

Villa Ochoa, J.A, (2011). *Comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada. Un análisis desde la teoría de Pirie-Kieren*. Tesis doctoral publicada, Universidad de Antioquia.