II CEMACYC
II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
29 octubre al 1 noviembre. 2017
Cali, Colombia
REDUMATE
ii.cemacyc.org

La Teoría de conjuntos de Francisco Vera en comparación con los inicios de la topología conjuntista

Mónica Andrea Aponte Marín
Doctorado Interinstitucional en Educación, Universidad del Valle
Colombia
monica.aponte@correounivall.edu.co

Resumen

Este escrito hace parte de los avances del proyecto de tesis doctoral titulado “La introducción en Colombia del método conjuntista cantoriano a través de la topología conjuntista”, que corresponde a un estudio histórico del surgimiento de la teoría de Conjuntos en Colombia. En este sentido se propone describir, explicar e identificar los factores condicionantes en el proceso de institucionalización de la topología conjuntista en Colombia. En la presentación de este trabajo se abordan algunos aspectos del desarrollo histórico de los métodos conjuntistas, haciendo énfasis en el caso colombiano que inicia en la década de 1940 con la enseñanza de esta disciplina a cargo del matemático español Francisco Vera.

Palabras clave: Topología Conjuntista, Métodos Cantorianos, Historia de la Matemática, Formación de Docentes.

Introducción

De acuerdo con los planteamientos de Sánchez y Alvis (2009), en la década de 1940 se ubican las primeras tentativas por dar a conocer la teoría de conjuntos y la lógica matemática en Colombia. Estos intentos se encuentran en el libro de Francisco Vera titulado *Introducción a la teoría de conjuntos*, recopilación de las notas de un curso dictado en Bogotá entre septiembre y octubre de 1942, de acuerdo con Arboleda (2015). Vera informa que elaboró este libro a partir de las notas del curso que dictó sobre estas materias por encargo de la Sociedad colombiana de ingenieros. Él indica que alcanzó a publicar las dos primeras lecciones durante su estadía en Colombia, y registra luego que tuvo que suspenderlas por *“las dificultades tipográficas con que tropecé, unidas a mi desplazamiento a la Argentina”*. Es importante resaltar que no solo con este libro quiso dar a conocer la teoría de conjuntos en Colombia, sino también dar soporte a conferencias divulgativas con referencia al estado del arte de la matemática conjuntista. El otro intento por dar a conocer la teoría de conjuntos está en dos artículos de divulgación de la teoría de conjuntos publicados por Waldemar Bellon en la revista de la *Universidad Nacional de Colombia, revista trimestral de cultura moderna* en 1945.

El enfoque de la enseñanza de los conjuntos en Bogotá en los años 1949-1960, apuntaba menos a dar cuenta de la génesis de los fundamentos, o a discutir problemas filosóficos y paradojas lógicas, que a presentar el sistema de axiomas, las técnicas y procedimientos conjuntistas para formular y demostrar teoremas en la construcción de los sistemas numéricos, el análisis, la topología y las geometrías no euclidianas. Este es el punto de vista adoptado por Courant y Robbins en su texto ¿Qué es la matemática? en 1941 que sirvió de base para la enseñanza de cursos de Thullen, de acuerdo con las evidencias disponibles. Este enfoque difiere al que empleó Vera, como puede inferirse de las notas que elaboró para un curso impartido en Bogotá.

A continuación se realizará una breve caracterización de algunos apartados de la obra ¿Qué es la matemática? De Courant & Robbins, por ser uno de los textos más empleados por los profesores de matemática en Colombia durante el periodo de 1950, y de la obra Introducción a la teoria de conjuntos de Vera, para poder determinar algunos factores condicionantes en el proceso de institucionalización de la topología conjuntista en Colombia.

Caracterización del lenguaje conjuntista del texto ¿Qué es la Matemática? De Courant & Robbins 1941

La primera edición del texto fue publicada en 1941 en lengua inglesa por Oxford University Press (Nueva York y Londres) con el título *What is Mathematics? An Elementary Approach to ideas and Methods*. Para el caso presente se realizará la caracterización del lenguaje conjuntista en la obra, con base en la tercera edición publicada en 1962, por Aguilar, S.A. de Ediciones, versión en español traducida por Luis Bravo Gala, la cual al parecer ha tenido en cuenta la cuarta edición inglesa fechada el 28 de octubre de 1947.

El texto se divide en ocho capítulos. Los dos primeros capítulos corresponden a un estudio sobre los sistemas de números así: en el capítulo I se trabaja sobre los números naturales y como suplemento a ese capítulo se introduce un estudio sobre la teoría de números; el capítulo II incorpora los sistemas de números, y como suplemento al capítulo se encuentra el álgebra de los conjuntos. En los capítulos III, IV y V trabaja los elementos geométricos siguientes: las construcciones geométricas, el álgebra de los cuerpos numéricos, la geometría proyectiva axiomática, las geometrías no euclídeas y las propiedades topológicas de las figuras. En los capítulos VI, VII y VIII se ofrece en conjunto una exposición autónoma del cálculo infinitesimal, haciendo un tratamiento especial a los conceptos de funciones y límites, máximos y mínimos, ejemplos de límites y de continuidad.

Como el propósito aquí es caracterizar el lenguaje conjuntista que presenta la obra, se prestará especial atención al capítulo II, Sistemas de Números, apartado IV, titulado: Análisis del concepto matemático de infinitud. Este apartado se inicia con un acercamiento a los conceptos fundamentales; los autores ejemplifican la sucesión de los enteros positivos 1, 2, 3,… como el primer y más importante ejemplo de conjunto infinito, haciendo un llamado de atención además sobre el concepto general de conjunto o agregado que comprende toda colección de objetos definida por una regla determinada que especifica exactamente que objetos pertenecen a la colección. A su vez indican que para comparar la “magnitud” de dos conjuntos diferentes es fundamental la noción de “equivalencia”:

> Si los elementos de dos conjuntos A y B pueden ser apareados, de modo que a cada elemento de A corresponda un elemento (y sólo uno) de B y a cada elemento de B corresponda un elemento de A, y uno solo, la correspondencia entre A y B se llama biunívoca, y dichos conjuntos se dicen equivalentes o coordinables (Couran & Robbins, p.86).

En este sentido, el texto introduce un método cantoriano que obedece al concepto de equivalencia para ilustrar que la verdadera idea que interviene en la operación de contar, por ejemplo, es el establecimiento de una correspondencia biunívoca; conocemos, por lo demás, que la idea de Cantor se centró en la extensión del concepto de equivalencia a los conjuntos infinitos, y así determinó la aritmética de los conjuntos infinitos.

Posterior a la presentación de los conceptos fundamentales, se ofrece la numerabilidad de los números racionales y la no-numerabilidad del continuo; en este apartado los autores presentan de una manera un poco más intuitiva uno de los primeros desarrollos de Cantor, a saber, que el conjunto de los números racionales es equivalente al conjunto de los números enteros, en este sentido ilustran como el conjunto de los números racionales es numerable, así:

> Todo número racional puede escribirse en la forma a/b, donde a y b son enteros, y todos aquellos números pueden disponerse en un cuadro, con a/b en la fila a y en la columna b; por ejemplo ¾ estará en la tercera fila y en la cuarta columna (Couran & Robbins, p.88).

Por lo anterior puede decirse que el texto mantiene la tradición histórica con respecto al estudio del infinito, siguiendo el modo de proceder cantoriano, de tal modo que después de dichas afirmaciones el lector debe esperar que todo conjunto infinito sea también numerable, como lo llegaron a pensar Cantor y Dedekind hacia el año 1874. En su artículo sobre una propiedad de la colección de todos los números reales algebraicos, Cantor demuestra que los números racionales pueden ser puestos en correspondencia biunívoca uno a uno con los números naturales, mientras que no puede hacerse lo mismo con los números reales.

Vemos como se presenta un lenguaje y un uso de los métodos conjuntistas en la presentación de un tipo superior de infinitud cuando se ilustra el resultado que el conjunto de los números reales, no es numerable. Mantienen los autores la demostración indirecta trabajada por Cantor, pero de una manera más ilustrativa; se parte de la hipótesis de que todos los números reales pueden ser enumerados y dispuestos en una sucesión, para construir un número real que no figura en la sucesión, mostrando la contradicción con la hipótesis inicial. Se evidencia un poco la falta de formalismo en la presentación de la no numerabilidad de R, aunque presentan también otra demostración más intuitiva de la no-numerabilidad del continuo numérico por reducción al absurdo:

> Supongamos que el conjunto de todos los puntos de la recta comprendidos entre 0 y 1 puede ser ordenado en la sucesión
>
> $$a_1, a_2, a_3, \ldots \quad [1]$$
>
> Incluyamos el punto a1 en un intervalo de longitud 1/10, el punto a_2, en un intervalo de longitud $1/10^2$, y así sucesivamente. Si todos los puntos del intervalo (0,1) estuvieran en la sucesión [1], el intervalo unidad parecería totalmente recubierto, en parte quizás por intervalos superpuestos, por la sucesión de intervalos de longitudes 1/10, $1/10^2$,… que hemos construido (El hecho de que alguno de los intervalos pueda extenderse fuera del segmento unidad no influye en la demostración). La suma de las longitudes de dichos intervalos viene dada por la serie geométrica

$$1/10 + 1/10^2 + 1/10^3 + \ldots = \frac{1}{10}\left[\frac{1}{1-1/10}\right] = 1/9$$

(Couran & Robbins, pp. 91-92).

Así la hipótesis de que la sucesión [1] contiene todos los números reales comprendidos entre 0 y 1 que llena el intervalo completo de longitud 1 conduce a la contradicción de que dicho intervalo puede ser recubierto por un conjunto de intervalos de longitud total igual a 1/9, lo cual es intuitivamente absurdo. Llamamos la atención una vez más en que esta demostración presentada por los autores desde un punto de vista lógico requiere un análisis más detallado en cuanto a los aspectos formales, pero considerando los propósitos del texto destacamos la presentación de la misma, pues con ella se le permite introducir a un lector en uno de los teoremas importantes en la teoría moderna de la medida, ya que cuando se reemplazan los intervalos anteriores por otros más pequeños de longitud $\varepsilon/10^n$, donde ε es un número positivo arbitrariamente pequeño, se ve que los puntos de todo conjunto numerable de la recta pueden ser incluidos en un conjunto de intervalos de longitud total igual a $\varepsilon/9$. Puesto que ε es arbitrario, dicha longitud total puede ser tan pequeña como se quiera. En la terminología de la teoría de la medida se expresa este hecho diciendo que el conjunto numerable de puntos tiene medida nula.

Después de presentar la existencia de los tipos diferentes de infinitud, el infinito numerable de los enteros y el infinito no-numerable del continuo, el texto expone la noción de Números cardinales: *Si dos conjuntos, finitos o infinitos, son equivalentes, diremos que tiene el mismo número cardinal* (Couran & Robbins, p.93). Cantor define esta noción de cardinalidad de la siguiente manera:

> Si dos variedades bien definidas M y N se pueden coordinar entre sí unívoca y completamente, elemento a elemento (lo que, si es posible de una manera, siempre puede suceder de muchas otras), permítase que empleemos en lo que sigue la expresión de que estas variedades tienen igual potencia, o también que son equivalentes (Ferreirós, 1991, p. 236).

A partir de esta definición, Cantor presentaba resultados elementales que más adelante se convertirían en teoremas. Por ejemplo, afirmaba que si M y N no tienen igual potencia, entonces M es equivalente a una parte de N -la potencia de M es menor que la de N- o N es equivalente a una parte de M -la potencia de M es mayor que la de N-. De allí pasaba a considerar una serie de ejemplos de potencias; en primer lugar las potencias de variedades finitas, que coinciden con el número de sus elementos, esto le permitía establecer una propiedad un poco intuitiva de las potencias infinitas, que tradicionalmente se había considerado paradójica. En este sentido, observamos que estas definiciones son similares, se puede inferir así, que los autores siguieron a Cantor para establecer la misma, por lo cual para ellos el continuo de los números reales tiene un número cardinal mayor que el de los enteros.

De acuerdo a la breve caracterización expuesta, podemos concluir que el texto ¿Qué es la Matemática? De Courant & Robbins, emplea métodos cantorianos en la presentación de las nociones conjuntistas, en este sentido conjeturamos que muchos de los docentes en Colombia conocieron y emplearon estos métodos durante su proceso de formación, dado que en Colombia durante los años 50 a 70, las políticas educativas dejaron de ser un tema de debate y pasaron a convertirse en medios para el ingreso de directrices multinacionales, señalando además que en 1951 se funda la Facultad de ciencias en la Universidad Nacional, la especialidad en matemáticas superiores con la finalidad de preparar docentes de matemáticas a nivel universitario (Charum, s.f., 20). En este sentido, reconociendo que este texto tuvo una gran difusión en Norte América y que uno de sus propósitos era contribuir a la educación superior americana, de estudiantes, profesores, filósofos e ingenieros, pensamos que su empleo en los planes de formación de profesores de matemática en nuestro país fue de gran influencia.

Caracterización del lenguaje conjuntista del texto Introducción a la Teoría de Conjuntos de Vera

En la presentación del capítulo 1, del texto Introducción a la teoría de conjuntos de Vera, se observa un acercamiento intuitivo a las nociones conjuntistas cantorianas, dado que el matemático establece la definición de conjunto a partir de la definición cantoriana quien la implanta como "conexión determinada de diversos objetos de nuestra intuición (…), de nuestra mente llamados *elementos* del conjunto, en una *totalidad*" (Vera 1942, p. 11). Sin embargo, hace un llamado especial al peligro de la palabra *totalidad* que está presente en la definición, por ser inconstituible, y a partir de allí indica las limitaciones de la misma para presentar el conjunto como una "pluralidad definida o determinada", diciendo que un conjunto está determinado cuando, cualesquiera que sean los elementos pueden pertenecer o no pertenecer al conjunto; de esta manera, para cada par de elementos no exista más que el problema de estar formado o no estar formado por los elementos distintos. En este sentido, se observa una presentación intuitiva de la definición conjuntista.

Posterior a esta definición, Vera delimita los conceptos de correspondencia, orden, número ordinal, número cardinal, correspondencia entre ordinales y cardinales, principio de Schröder, conjuntos finitos e infinitos, función, exponenciación, etc. Podemos ver que todas estas definiciones presentadas por Vera, carecen en muchas ocasiones de un formalismo matemático, por lo general se realizan algunas re contextualizaciones históricas en lo concerniente a su fundamentación pero la presentación de las mismas sigue siendo netamente intuitiva, como podemos ilustrar a continuación en la construcción de la aritmética realizada por Vera (pp.26-27): *"en posesión del número natural, con dos de ellos se construye el racional, con infinitos números racionales se crea el real, con dos números reales se forma el complejo, y con todos ellos la Aritmética"*

Con Vera, entonces, la presentación de las nociones básicas de la teoría de conjuntos, tiende a ser la mayoría de las veces de manera intuitiva, quizás se pueda pensar que el autor está considerando la intuición como una característica inherente al ser humano, de esta manera es muy probable, que los cursos impartidos con el texto Introducción a la teoría de conjuntos de Vera, promoviera en los estudiantes colombianos un acercamiento a las nociones de conjunto, funciones, en especial la función biyectiva, desde enfoques intuitivos, y quizás no se inquirió para que los estudiantes comprendieran los principales aspectos desde un enfoque histórico-epistemológico en el que se presenta la consolidación de la teoría de conjuntos cantoriana, con todos los problemas y entramados paradójicos que envuelven la teoría. Además, resulta claro que el texto pretendía buscar habilidades en los estudiantes para conocer la construcción conjuntista de los números naturales y enteros y ver ahí su cardinalidad, también que lograran manejar de algún modo la noción matemática de igual, menor o mayor entre cardinalidades de conjuntos infinitos. Y especialmente lograran significar nociones tan claves como la relación parte-todo, el conjunto universal, la noción de infinito, que siempre se revelan de una forma paradójica o que bien nuestra razón o intuición yerran en algo esencial para comprenderlas.

En el capítulo 2 expone la caracterización del continuo matemático, parte de un concepto fundamental de la teoría de conjuntos que es el de numerabilidad. Para la caracterización del continuo deja un poco de lado los elementos intuitivos que viene manejando en el capítulo 1, e inicia un lenguaje más formal. También hace uso de la prueba de la diagonal empleada por Cantor, este procedimiento le permite a Vera acercarse al problema presentado por Cantor de la existencia de conjuntos con distintas potencias y dar paso a la presentación del continuo físico y el continuo matemático (Vera 1942, p.15).

Vemos como, en Vera la presentación de la teoría de conjuntos es más orientada a las necesidades de fundamentar el análisis infinitesimal en el continuo real, que a relacionar los conjuntos con las estructuras algebraicas. Este enfoque de enseñanza empleado por Vera concuerda con los desarrollos de la topología conjuntista, al menos a lo referente con el problema del continuo, pues en los inicios de la topología conjuntista se evidencia que la motivación de Cantor para los estudios de la topología conjuntista estaba directamente relacionada con la teoría de cardinales, y en último término con la hipótesis del continuo: "*Antes de abordar el problema de la numerabilidad del conjunto de los números reales, demostraremos este hecho sorprendente: el conjunto de todos los números reales tiene la misma potencia que el de los comprendidos entre 0 y 1*." (Vera 1942, p. 44).

En este capítulo 2, Francisco Vera intenta ilustrar uno de los conceptos y las problemáticas fundamentales para la génesis de la topología conjuntista los relacionados con el problema del continuo. Recordemos que Cantor retoma las discusiones de tipo filosófico que se han dado en torno a la cuestión sobre qué es un continuo: la disputa entre los partidarios de Aristóteles, para quienes el continuo es divisible indefinidamente, los de Epicuro, quienes aseguran que se compone de átomos finitos y la opinión de Tomás de Aquino, quien afirmaba que no se compone de partes. A partir de estas discusiones, Cantor afirmaba que no se había llegado al fondo de la cuestión, y que por tanto todos estos filósofos preferían eludirla elegantemente:

> Solo me veo obligado a desarrollar la noción de continuo de la manera sobriamente lógica en la que he de concebirlo, y como lo necesito en la teoría de variedades, con toda la brevedad y solo en relación a la teoría de conjuntos matemática. Esta empresa no me ha resultado fácil por la razón de que entre los matemáticos a cuya autoridad me remito de buen grado, ni uno solo se ha ocupado del continuo con precisión, en el sentido en el que lo necesito yo aquí (Cantor, citado en Ferreirós 1991, p. 250).

Se puede pensar que Cantor no entra en disputa quizá porque su punto de vista conjuntista acepta de antemano la idea de que el continuo ésta compuesto de puntos. Ahora bien, el tema de la definición del continuo fue discutido también en tres cartas de 1882 enviadas a Dedekind; sin embargo, el enfoque de Dedekind está demasiado centrado en las peculiaridades de Q, por lo que presupone un conjunto totalmente ordenado. Por el contrario, Cantor quería una definición de continuo aplicable a espacios métricos, lo que requiere ideas de carácter más topológico como las que intervienen en las sucesiones fundamentales (condición de Cauchy). De allí que una de las cuestiones a resolver fuera la caracterización completa del continuo; de esta manera Cantor pregunta en una carta a Dedekind si es posible establecer una correspondencia biunívoca entre un cuadrado y uno de sus lados.

Es importante destacar que en su demostración de la correspondencia biunívoca entre R^2 y R, Cantor plantea al menos dos posiciones: en primer lugar, se manifiesta preocupado por la cuestión de la veracidad de los enunciados matemáticos, refiriéndose a aquellas hipótesis habitualmente asumidas como obvias, sin que nadie haya asumido la responsabilidad de validarlas en un sistema axiomático. En segundo lugar, dentro de su empeño por comprender la estructura del continuo lineal, Cantor delimita un nuevo campo de estudio que se revelará de una riqueza sin igual en los períodos subsiguientes: *la teoría de los espacios topológicos.*

Moore (2008) haciendo un llamado de atención a la topología, que tiene sus raíces en el análisis real y complejo, considera importante emplear los conceptos interrelacionados de conjunto abierto, conjunto cerrado y de punto límite. En este sentido es pertinente observar los siguientes momentos dentro del desarrollo de la topología de los abiertos: La noción de punto límite de un conjunto de Weierstrass-Cantor, la definición de conjunto cerrado por Cantor, los conjuntos abiertos, los aportes de Fréchet y Hausdoff para la topología general y la noción de espacios topológicos.

Las nociones topológicas relacionadas con la idea de punto de acumulación, eran presentadas por Weierstrass, en su curso sobre introducción a la teoría de funciones analíticas. Este teorema en terminología moderna nos dice básicamente que todo conjunto de puntos infinito y acotado tiene al menos un punto de acumulación, se tiene así que la noción de Weierstrass sobre punto límite no es otra que la de punto de acumulación. Se reconoce como relevante que dos pilares de los estudios de Cantor, el principio de Bolzano-Weierstrass y la idea de punto límite (punto de acumulación) procedían de Weierstrass. Cantor supo emplearlas en un sentido conjuntista, así el principio de Bolzano-Weierstrass fue la clave para demostrar que R no es equipotente con N y la noción de conjunto derivado fue la herramienta fundamental en la que basó su análisis de la topología conjuntista de R y R^n. En el capítulo 4 del texto, Vera presenta los conjuntos ordenados y conjuntos bien ordenados, estableciendo la definición de orden a través de la representación por puntos en un eje de abscisas, los términos de la sucesión de los números racionales, escribiendo debajo de ellos sus correspondientes números ordinales; resultando que una sucesión ordenada de números racionales no tiene el mismo orden que una sucesión de ordinales naturales (Vera 1942, p. 98).

A partir de esta definición Vera, introduce la noción de conjunto bien ordenado al estilo cantoriano, y establece el orden relativo de los puntos de un conjunto lineal, para dar paso a la presentación del teorema de Bolzano-Weierstrass. Para la presentación del teorema considera el conjunto de todos los números reales divididos en dos clases A y B, formada la A por todos los números *a* tales que a su izquierda no hay ningún punto *o*, a lo más un número finito de puntos, y la B, por los números *b* a cuya izquierda hay infinitos puntos del conjunto (Vera 1942, p.98). Se ve que esta clasificación es una cortadura en el sentido de Dedekind, mostrando así que todo conjunto infinito acotado tiene al menos un punto de acumulación, presentación que concuerda con la noción de punto límite de un conjunto de Weierstrass-Cantor.

En el capítulo V sobre la Aritmética Transfinita, nos ilustra la manera en que Vera abordará ciertos conceptos claves y fundamentales de la topología de los abiertos, en palabras de él *"para comprender el alcance de la teoría de conjuntos tal como la formo Cantor hay que distinguir entre matemática libre y matemática pura"* (Vera 1942, p. 114) así que los resultados no deben admitirse directamente en el análisis sino re-demostrarlos por métodos aritméticos cuando hay la necesidad para aplicarlos. En el último capítulo, presenta los problemas de las antinomias de la teoría de conjuntos cantoriana y la salida a estas a través de la axiomatización de Zermelo. Por otra parte se observa que los conceptos de conjunto cerrado y conjunto abierto, no son expuestos de forma explícita por medio de definiciones en la obra de teoría de conjuntos de Vera, y reconocemos de acuerdo al análisis histórico que estos dos conceptos son claves para el desarrollo de la topología conjuntista.

De esta manera, podemos inferir que Vera toma métodos cantorianos para fundamentar el problema del continuo real. Para él, comprender el continuo real se trata no solo de percibir sus propiedades mediante técnicas empíricas, sino de caracterizar teóricamente a los reales como campo numérico. En este sentido, Vera define las cortaduras de Dedekind sobre R y pasa luego a estudiar las propiedades algebraicas de las operaciones sobre el campo. También emplea los infinitésimos para introducir a los alumnos en algunas representaciones sobre los conceptos básicos del cálculo diferencial.

Se puede inferir entonces que el tipo de cultura sobre los métodos conjuntistas que promovió Vera en Colombia, es una cultura que hace énfasis en los aspectos lógicos y filosóficos de los métodos de Cantor. Según se ilustra en la presentación de sus conceptos en la obra de Introducción a la teoría de conjuntos, pues se evidencia una carencia ante la resolución de problemas concretos de las operaciones, favoreciéndose de este modo el pensamiento operacional y técnico. Pensamiento que es, no obstante, sustentado en algunos antecedentes históricos para establecer las nociones conjuntistas, basándose en un acercamiento intuitivo, para dar algunas definiciones más abstractas en capítulos siguientes con la carencia de ejemplificaciones concretas.

Algunas Consideraciones Finales

Es importante recalcar que en este trabajo de investigación, se consideran las metodologías trabajadas en la historia de la matemática, de esta manera partiendo de un estudio diacrónico donde se da cuenta del proceso de constitución de la topología conjuntista. Se busca así aclarar algunos procesos que condujeron al desarrollo de la misma con la intención de reconocer los principales elementos del método cantoriano, en el desarrollo de los conceptos topológicos, y así dar inicio a los análisis de algunos textos trabajados en Colombia durante el periodo de 1940 a 1960. Como caso particular, en este documento se presenta una breve caracterización de dos textos que tuvieron un rol protagónico en los procesos de formalización y difusión de esta disciplina en Colombia durante ese periodo. Con este análisis observamos que desde el inicio la introducción de los métodos cantorianos en Colombia, se ofreció desde enfoques distintos con respecto a la realidad histórica del desarrollo de la topología conjuntista. En este sentido se considera que la transposición didáctica realizada dentro de esta enseñanza es "enorme" en comparación con el surgimiento de los conceptos en los textos y lo que probablemente se pudo haber aprendido.

Podemos inferir que las diferencias sugieren que producimos artificialmente aspectos de formalización, amplificación y generalización de los conceptos a enseñar. De hecho, la naturaleza de las nociones que se formalizan demuestran en particular el amplio uso que hacemos del registro simbólico. Este se utiliza deliberadamente para caracterizar algunos de los métodos cantorianos, tanto en el texto de Courant & Robbins como en el texto de Vera, como caso particular, en el texto de Vera se busca unificar y generalizar los conceptos en el marco de la recta real, mientras que este aspecto es prácticamente transparente en la producción de conocimientos descritos desde el desarrollo matemático e histórico de la topología conjuntista. En esta etapa de trabajo, nuestra comprensión de lo que está en el corazón de las nociones de topología conjuntista se amplió en al menos dos direcciones. Por un lado, ahora tenemos una visión mucho más amplia, externa a nuestro contexto institucional de las especificidades de los conceptos. Su génesis histórica, su función en los marcos de topología básica y general, su presentación en los textos de *¿Qué es la Matemática?* e *Introducción a la teoria de conjuntos*, ha permitido identificar la introducción de elementos para los procesos de formalización e institucionalización de los métodos cantorianos en Colombia. También el análisis anterior mostró que los conceptos que se definen entre sí deben ser integrados a una red de mayor conocimiento. Una reflexión que se puede llevar a cabo en los procesos de integración en nuestra enseñanza.

Referencias y bibliografía

Albis, V. & Sánchez, C. (2009). La introducción de la teoría de conjuntos y la matemática moderna en Colombia. Primera parte: El aporte de los extranjeros. Mathesis III 42, 265 - 293.
Albis, V. & Sánchez, C. (2012). Historia de la Enseñanza de las Matemáticas en Colombia. De Mutis al siglo XXI. Quipu, 14, 109-157.
Arboleda, L. C. (2015). Francisco Vera en Colombia. Transición de las matemáticas del ingeniero a las matemáticas profesionales. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/292147696, febrero 16, 2016.
Arboleda, L. C. (2015). Desarrollo histórico de las matemáticas y la ingeniería en Colombia en los siglos XIX y XX. Bogotá: Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
Cantor, G. (1845-1918). Recuel d´articles 1889. Georg Cantor: Ouvres traduites en française. Tomado de Gallica Bibliothèque Numérique [Source gallica.bnf.fr/Bibliothèque nationale de France].
Courant, R. & Robbins H. (1962). ¿Qué es la Matemática?. Editorial Aguilar, Madrid.
Courant, R. y Robbins, H. (1941). What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods. New York: Oxford University Press
Charum, J. (s.f.) Matemática en Colombia. Manuscrito.
Ferreirós, J. (1991). *El nacimiento de la teoría de Conjuntos, 1854-1908*. Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid, 205-366.
Ferreirós, J. (2006**).** *Fundamentos para una teoría general de conjuntos*. *Escritos y correspondencia selecta.* Traducción comentada e introducción de José Ferreirós. Editorial Crítica, Barcelona.
Moore, G. (2008). The emergence of open sets, closed sets, and limit points in analysis and topology.
Vera, F. (1942). Teoría de Conjuntos. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 5(18), 230-240.
Vera, F. (1943). Historia de las ideas matemáticas. Sociedad Colombiana de Ingenieros. Bogotá: Editorial Centro
Vera, F. (1948*) Introducción a la teoría de conjuntos*. Buenos Aires Argentina: Coepla.