II CEMACYC
II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
29 octubre al 1 noviembre. 2017
Cali, Colombia
REDUMATE
ii.cemacyc.org

Perspectivas teóricas de la razón, la proporción y la proporcionalidad como relaciones de comparación

Rafael **Moreno** León
Estudiante de la Maestría en Docencia de la Matemática Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
rmorenol@upn.edu.co
Roger Alexander **Mayorga** Quevedo
Estudiante de la Maestría en Docencia de la Matemática Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
ramayorgaq@upn.edu.co

Edgar Alberto **Guacaneme** Suárez
Profesor de la Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
guacaneme@pedagogica.edu.co

Resumen

Esta ponencia surge en el marco de una investigación que busca explorar los efectos del diseño de una secuencia de tareas, para apoyar el desarrollo del pensamiento proporcional, de un grupo de estudiantes de grado séptimo de la educación básica en Bogotá. Dentro de dicho estudio, se han revisado las perspectivas teóricas de las razones, proporciones y proporcionalidad (RPP), para fortalecer el saber matemático de los investigadores y su conocimiento pedagógico del contenido. Emergen así: la Antifairesis o Antanairesis, la proporcionalidad abordada desde la obra Elementos de Euclides (Libros V y VII), la teoría de las magnitudes para la proporcionalidad y la teoría de la proporcionalidad centrada en los números reales. El enfoque para presentar estas miradas de las RPP es el de relación de comparación, porque la aritmetización como cociente de la razón y la proporción en la enseñanza, desvirtúa su aspecto más fundamental, vincular dos objetos matemáticos.

Palabras clave: Razón y proporción, pensamiento proporcional, razón como relación, razón como cociente

Introducción

Los dos primeros autores desarrollan un trabajo de grado bajo la dirección del tercero, desde febrero de 2016, enfocado en el diseño de una secuencia de tareas, para apoyar el razonamiento proporcional, de un grado séptimo de la educación básica, en un colegio de la Secretaría de Educación de Bogotá. La propuesta de enseñanza se desarrolla a la fecha, en el programa de formación de la Maestría en Docencia de la Matemática, de la Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá (UPN). El trabajo de grado se enmarca dentro de la línea de investigación Conceptos y Procesos en álgebra, desarrollada por el Grupo de Álgebra de la universidad. El propósito de la línea radica en primer lugar, en ayudar a fortalecer la formación permanente de profesores de matemáticas, en lo referente a conceptos y procesos del álgebra, tanto desde el conocimiento del contenido como del conocimiento didáctico sobre el contenido (Universidad Pedagógica Nacional, 2016).

En concordancia con la línea de investigación donde se enmarca este estudio, se hace necesario fortalecer el conocimiento matemático y didáctico sobre razones, proporciones y proporcionalidad (RPP). Luego de este paso tan importante, los autores pueden elaborar una propuesta de innovación curricular al respecto del objeto matemático elegido.

Cómo lo señalan Chevallard, Bosch, & Gascón (1997) el conocimiento debe ser construido mediante la interacción entre los estudiantes y no por la validación o imposición que pueda dar el docente; se trata entonces de "estudiar matemáticas" en el aula, no de replicar procedimientos y resultados. Muchos temas de matemáticas se presentan de manera *compartimentalizada*, es decir sin unidad entre los mismos contenidos y sin conexiones hacia otros temas dentro y fuera de la matemática (Agudelo-Valderrama & Martínez, 2015, p. 3; García, 2007; Romero Julio, Garcia Gloria, 1998). Esta desarticulación se da por varias razones, pero en especial por no mostrar el área al enseñarla, como una herramienta útil y poderosa para comprender nuestro entorno, sino como una serie de algoritmos y procedimientos sin significación, ni relación.

En el escenario de la resolución de problemas se le da sentido a las matemáticas, al mostrarlas con "hilos conductores" hacia otros temas dentro de la misma área e inclusive hacia otras disciplinas del conocimiento. El mejorar la comprensión relacional de las matemáticas implica "saber qué hacer y porque", además de construir el conocimiento matemático de manera significativa (Skemp, 1976). El conocimiento debe ser construido, a partir del contexto que proporcionan las matemáticas escolares[1], vinculando la realidad del estudiante y dándole sentido.

Una característica de la transición del pensamiento aditivo al multiplicativo es la dificultad de los estudiantes de diferenciar situaciones proporcionales de situaciones con estructura aditiva, puesta de manifiesto por el uso abusivo de métodos aditivos erróneos para resolver las situaciones proporcionales (Fernández & Llinares, 2012, p. 130; Obando, 2015; Singh, 2000). Así mismo en muchas situaciones de aula de tres términos conocidos y uno desconocido, los estudiantes recurren indiscriminadamente al uso de técnicas o estrategias proporcionales, tanto en problemas aditivos como en problemas proporcionales (Fernández & Llinares, 2012, p. 130; Lamon, 2012; Obando, Vasco, & Arboleda, 2014; Valverde & Castro, 2012). Lo anterior demuestra que los estudiantes recurren a estrategias o técnicas de resolución de situaciones proporcionales, sin mostrar comprensión de lo que hacen y porque lo hacen.

[1] Se entiende por matemáticas escolares "las matemáticas consideradas como objeto de enseñanza y aprendizaje…Los términos y conceptos matemáticos que transmite el sistema educativo para la formación de todos los ciudadanos corresponden a nociones socialmente útiles y culturalmente relevantes" (Rico, Lupiáñez, Marín, & Gómez, 2007).

Los autores de este estudio quieren desarrollar una propuesta de situaciones de aula que mejore los niveles de comprensión en los estudiantes, vinculando los temas de matemáticas mostrados normalmente de forma desarticulada, y que consolide el razonamiento proporcional como una herramienta fundamental en la resolución de problemas. Todo lo escrito hasta ahora lleva a los autores del trabajo de grado, a plantear la siguiente pregunta *¿De qué manera las actividades de la propuesta de intervención en el aula, apoyan el desarrollo de la comprensión sobre razón y proporción, en situaciones proporcionales?*

Tipo de estudio y fases

El estudio principal, del cual surge esta ponencia, se considera como un experimento de enseñanza y encaja en la investigación de diseño. Este enfoque o paradigma de investigación, de naturaleza cualitativa es desarrollado en el campo de las ciencias de la educación. La investigación de diseño como lo afirman Molina, M., Castro, E., Molina, J. (2011) "persigue comprender y mejorar la realidad educativa a través de la consideración de contextos naturales en toda su complejidad, y del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico" p.75. Además afirman los anteriores autores que la investigación de diseño pretende documentar los recursos y conocimientos que manifiestan los estudiantes en la resolución de las tareas, las interacciones entre los estudiantes y profesores, la evolución de las concepciones y en general, cómo se realiza la enseñanza a lo largo de la experimentación.

Luego del planteamiento del problema de investigación en el primer semestre de la MDM, durante el segundo semestre se han revisado los aspectos teórico-matemáticos de la RPP[2], desde varias perspectivas. Lo anterior ha fortalecido las comprensiones de los autores del trabajo de grado sobre estos temas, como sustento para elaborar la secuencia de actividades. Ya para el tercer semestre en desarrollo a la fecha, se plantea el diseño de las situaciones de aula que fortalezcan el avance del razonamiento proporcional en el grupo donde se realizará el estudio. Esta revisión teórica fortalece indudablemente el diseño de las situaciones de aula y muestra para los autores del trabajo de grado un referente desde los aspectos formales de las RPP. A continuación se detallan las fases del trabajo de grado:

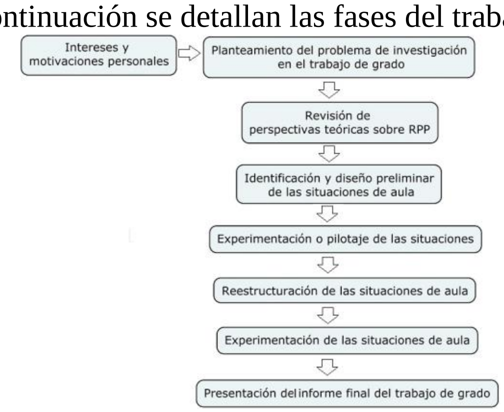

Ilustración 1. Fases del estudio propuesto en el trabajo de grado

Perspectivas teóricas de la razón, la proporción y la proporcionalidad

A continuación se muestran algunos aspectos necesarios para nuestro estudio principal, sobre las RPP, en especial las definiciones de razón, proporción y algunas características de la proporcionalidad desde la teoría de las magnitudes. Casualmente, estas miradas están

[2] En especial Guacaneme (2011), Sánchez Ordoñez (2013), Obando, Vasco, & Arboleda (2009) y Euclides (1994).

organizadas en orden cronológico, pero esto no implica nada en el análisis hecho en este escrito.

El método de la Antifairesis o Antanairesis

Existe una teoría de la proporción para magnitudes geométricas y para números, que antecede a la presentada por Euclides en los Libros V y VII de Elementos, y que se basa en la idea de *Antifairesis o Antanairesis* o método de restas sucesivas (conocido como algoritmo de la sustracción de Euclides) (Guacaneme, 2015, p. 2). Este proceso se hace de la siguiente manera: dados dos *números o magnitudes homogéneas*[3], se resta el menor al mayor tantas veces como se pueda, hasta que quede un residuo menor que el menor de los números de partida. Entonces se repite el proceso tomando como partida el menor de los números iniciales y el residuo obtenido; y así sucesivamente (Oller Marcén & Gairín Sallan, 2013). Este proceso genera una n-upla que da cuenta del proceso realizado, con esta relación establecemos un referente o índice de comparación entre dos objetos (entre números o magnitudes).

Razón matemática. Sean P y Q dos cantidades o magnitudes homogéneas, llamaremos *razón matemática* entre P y Q, a la relación de comparación entre ellas, dada por la n-upla.

Proporción matemática. Dadas dos cantidades o magnitudes P y Q, se dice que son proporcionales a otras dos cantidades o magnitudes R y S, si la n-upla generada por la antanairesis entre P y Q es la misma que entre R y S.

Ejemplo: Analicemos la antanairesis entre 6 y 4, y entre 3 y 2, para poder establecer una relación entre sus n-uplas.

a) Para 6 y 4, tenemos Restando 6 de 4 se obtiene 2, luego 2 se compara en relación a 4 $\{6;4\}\rightarrow\{2;4\}$, Invirtiendo los papeles entre 2 y 4 tenemos $\{4;2\} \rightarrow\{2;2\} \rightarrow\{0;2\}$
En total hemos hecho primero una resta y luego dos restas, de lo que se concluye que la antanairesis entre 6 y 4 es **[1,2]**.

b) Para 3 y 2, tenemos:
$\{3;2\} \rightarrow \{1;2\}$, obteniendo una resta del primer nivel y de $\{2;1\} \rightarrow \{1;1\} \rightarrow\{0;1\}$, se obtienen dos restas sucesivas. Dado lo anterior, la antanairesis entre 3 y 2 es **[1,2]**.

Como las dos razones matemáticas son iguales (es decir forma la misma n-upla), forman una proporción matemática.

La proporcionalidad abordada desde la obra Elementos de Euclides (Libros V y VII)

La obra los *Elementos* de Euclides resulta de gran utilidad para establecer el conocimiento teórico que se tenía en la época con respecto a los conceptos estudiados. De los trece libros que conforman la obra de Euclides, son dos los dedicados a la proporcionalidad: el libro V, dedicado a las magnitudes y el libro VII, dedicado a la aritmética (Oller Marcén & Gairín Sallan, 2013).

Al revisar el Libro V de Euclides (1994) se nota la aparición del término magnitud, comúnmente esta se identifica como una característica de los segmentos geométricos que permite su comparación. Pero podría interpretarse el término magnitud, de una forma más general desde esta perspectiva, como la característica común a porciones de superficies, de volúmenes, etc., en general la magnitud es la característica común de los elementos de un conjunto de objetos que sean medibles.

Razón matemática. Una razón es determinada relación respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas (Definición 3).

[3] Por ahora se dirá que son magnitudes de la misma naturaleza. Más adelante se dará una definición formal sobre el término.

Se puede observar que con esta definición de razón matemática, se empieza a identificar este elemento, como una relación de comparación entre dos objetos, desprovista de cantidad alguna para su referenciación.

Ejemplo 1:

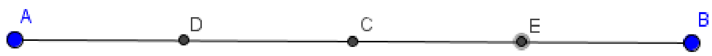

Ilustración 2: Razón matemática entre magnitudes de segmentos

Vemos que $\overline{AB}$ es cuatro veces $\overline{AD}$, la razón respecto al tamaño de los dos segmentos es la de ser el cuádruple, el primero en relación al segundo.

Proporción matemática. Llámense proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón (Definición 6).

Ejemplo 2: Considerando las siguientes razones, tomadas del mismo ejemplo 1, tenemos que la relación que hay entre $\overline{AD}$ y $\overline{AC}$, y la relación entre $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, son la misma: “ser la mitad de”. Por lo tanto $\overline{AD}$ y $\overline{AC}$, junto con $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ están en proporción, al manejar la misma relación de comparación.

Al revisar el Libro VII de Euclides (1994) se observa una teoría sobre la proporcionalidad centrada sobre números, es decir es vista desde la aritmética (Oller Marcén & Gairín Sallan, 2013, p. 321). En este libro, como afirman los mismos autores al estudiar la obra de Euclides, no se hace una definición clara y precisa sobre los términos “razón” y “proporción”. Pero si se hace alusión directa a ellos a partir de tres relaciones diferentes, entre cada par de números. Esto no quiere decir que la razón o la proporción sea un número en sí, sino que estas son el resultado de la comparación de dos elementos, en este caso números.

Euclides define tres relaciones que son disyuntas, es decir una de ellas no depende de las otras dos para definirse o referenciarse.

- **Definición de relación parte**: Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor (Definición 3).
- **Definición de relación partes**: Un número es partes de un número, el menor del mayor, cuando **no mide al mayor (Definición 4)**
- **Definición de relación múltiplo: E**l mayor es múltiplo del menor cuando es medido por el menor (Definición 5).

Si dos números se relacionan mediante una de las tres relaciones anteriores entonces diremos que los números determinan una *razón***.** Unos números son *proporcionales* cuando el primero es el mismo múltiplo o la misma parte o las mismas partes del segundo que el tercero del cuarto (Definición 21).

La teoría de las magnitudes para la proporcionalidad

Al hablar de proporcionalidad es inevitable usar términos como: magnitud, cantidad, medida, espacio de medida o espacio métrico, entre otros, por eso es necesario precisar en el lenguaje, porque recurrentemente serán usados estos conceptos, por tanto deben considerarse sus alcances y los ámbitos de aplicación de lo referenciado. A continuación se retoman las ideas de Sánchez Ordoñez (2013) y Obando, Vasco, & Arboleda (2009) para tal fin.

Si se opera el conjunto $\mathcal{M}_1$ (llamado magnitud definido con una suma y un orden característico) con otro $\mathcal{M}_2$ de la misma naturaleza, mediante el producto cartesiano, se obtiene otro conjunto de parejas ordenadas que usualmente se refiere al conjunto $\mathcal{M}_1 \mathrm{x} \mathcal{M}_2$ que representa todas las relaciones entre los elementos de los conjuntos $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ en ese orden respectivo. En concordancia con lo anterior se entiende por *razón matemática* a cualquier elemento de $\mathcal{M}_1 \mathrm{x} \mathcal{M}_2$.

Ahora bien desde la forma usual, la igualdad de dos razones define o forma una *proporción*, desde esta perspectiva, una proporción se define como la relación entre relaciones (razones). Dado el conjunto $\mathcal{M}_1 \mathrm{x} \mathcal{M}_2$ existe una relación R de parejas de parejas ordenadas tal que: $\mathcal{R}=\{((a,b),(c,d)) \in \mathcal{M}_1 \mathrm{x} \mathcal{M}_2/(a,b) \cong (\alpha c, \alpha d)\}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Así $\mathcal{R}$ forma un nuevo conjunto al que se denota por [(a,b)], la clase de equivalencia[4] de todas las parejas ordenadas de $\mathcal{M}_1 \mathrm{x} \mathcal{M}_2$, que cumplen la relación $\mathcal{R}$. Esta relación de equivalencia, determina parejas (de parejas ordenadas) que están en **proporción.** Los elementos de $\mathcal{R}$ son de la forma: ((a,b),($\alpha c, \alpha d$)).

Sea $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ una función[5] biyectiva, llamada *proporcionalidad*, tal que:

a) $f\ (a_1 + a_2) = f(a_1) ⫲ f(a_2)$ (Homogeneidad con respecto a la suma).

b) $f(\lambda a) = \lambda f(a)$ (Homogeneidad con respecto a la multiplicación por un escalar).

c) $\forall a \epsilon M_1, \frac{f(a)}{a} = k$.

A lo anterior algunos autores suelen llamarle también *Isomorfismo de medida*, porque tanto el orden de $\mathcal{M}_1$ y su operación suma (+), suele respetar la misma estructura de orden en $\mathcal{M}_2$ y su operación (⫲), al aplicarse la función, es decir hay una correspondencia entre estos dos elementos, relación de orden y operación suma.

La teoría de la proporcionalidad centrada en los números reales

Consideramos que esta perspectiva es la usual, en el tratamiento que se le da a los aspectos relacionados con la proporcionalidad. No es la intención de los autores de esta ponencia, profundizar en la naturaleza del número real, como elemento abstracto, representable a partir de los infinitos puntos que componen una recta numérica. En ella por ejemplo, el número real puede representar una doble naturaleza, como magnitud o cantidad.

Tomando de Guacaneme (2001) se tienen las siguientes definiciones. En primer lugar, definamos el concepto de *fracción de números reales*, como un ente constituido por un *par ordenado* de números reales, donde se supone el segundo de ellos no cero. Si α y β son éstos, la fracción se representa así: $\frac{\propto}{\beta}$. A pesar de usar la fracción, no necesariamente nos referiremos a un cociente entre dos reales, sino más bien a una pareja ordenada de números reales. Dado lo anterior, precisaremos el siguiente conjunto, un conjunto de fracciones reales que puede denotarse como $\mathcal{F}_{\mathcal{R}} = \{(\alpha,\beta)/\alpha \in \Re,\ \beta \in \Re - \{0\}\} = \Re \times \Re - \{0\}$. Por ahora no se aclarará porque las segundas componentes, no pueden ser 0, sin embargo se sabe que si hay razones con consecuente 0 e igual se acomodarían a este modelo que se quiere construir.

[4] Es de equivalencia si la relación es Reflexiva, simétrica y transitiva. Además no podemos hablar de parejas iguales, porque sólo habría una sola pareja relacionada a sí misma.

[5]Definida entre dos conjuntos homogéneos, con una suma definida y un orden establecido, es decir con una magnitud definida.

Al cociente indicado $\frac{\alpha}{\beta}$ ó α:β se le denomina también *razón* de los números α y β, donde α (dividendo) es llamado antecedente y β (divisor) consecuente. Llamaremos *proporción* a la igualdad de dos razones y la escribiremos así: $\frac{\alpha}{\beta} \cong \frac{\gamma}{\delta}$ o bien $\alpha{:}\,\beta \cong \gamma{:}\,\delta$ donde los números α y δ se llaman *extremos* y los números β y γ *medios*; el número δ se denomina también *cuarta proporcional* de los números α, β y γ. Así dado el conjunto FR× FR podríamos construir un subconjunto $\mathcal{P}$ de FR× FR tal que todos sus elementos fuesen proporciones, es decir:
$\mathcal{P} = \{((\alpha,\beta),(\gamma,\delta)\epsilon \mathbf{F}_R \times \ \mathbf{F}_R / (\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \cong (\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta})\}$

Discusión y conclusiones

Hasta aquí se revisaron los cuatro referentes teóricos mencionados, tratando de buscar definiciones para los términos de razón y proporción desde cada perspectiva. Se puede concluir que desde cada una de las perspectivas examinadas, tanto la razón como la proporción se tipifican como relaciones de comparación entre dos objetos matemáticos, que pueden ser tanto números como magnitudes. También es oportuno señalar que quitarle ese sentido de la comparación relacional a estos elementos matemáticos (la razón y proporción) por la necesidad de operar o cuantificar es quitarle la esencia a estos elementos. Es en este punto donde surgen contradicciones, porque al momento de la enseñanza se evidencia prioridad por estimar mediante una cantidad dichas relaciones de comparación (Freudenthal, 1983; Guacaneme, 2002).

Así mismo se puede precisar desde la obra Elementos de Euclides, que las propiedades de las proporciones, pueden aportar de manera significativa, a la elaboración de las situaciones de aula que se diseñan en el trabajo de grado. Es bastante evidente la influencia que Euclides ha mostrado sobre toda la obra matemática, durante más de dos mil años, lo cual no se debe despreciar. Podrían haberse tomado otros referentes teóricos para tal fin, pero *Elementos* fundamenta el sentido teórico que captura la propuesta de intervención en el aula del trabajo de grado. El conocimiento o aproximación matemática que se posea para elaborar la propuesta de trabajo, si condiciona la aproximación didáctica y la investigación que se haga desde la educación Matemática sobre el objeto de estudio.

Referencias y bibliografía

Agudelo-Valderrama, C., & Martínez, D. (2015). En busca de una manera conectada de saber: el caso de una profesora de matemáticas. *REICE: Revista Electrónica Iberoamericana Sobre Calidad, Eficacia Y Cambio En Educación, 13(3), 121–141*. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5125008&info=resumen&idioma=ENG

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas, el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje* (Primera ed). Barcelona: Horsori.

Euclides. (1994). *Los Elementos. (Libros V – IX).* (M. L. Puertas Castaños, Ed.) (Traducción). España: Editorial Gredos S.

Fernández, C., & Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de Las Ciencias, 30(1), 129–141*. Recuperado de http://ensciencias.uab.es/article/view/596

Freudenthal, H. (1983). *Chapter 6: Ratio and Proportionality*. In Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.

García, F. J. (2007). El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio en las relaciones funcionales en la educación secundaria. *Investigación En Educación Matemática,* *(2007), 71–92*. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1268/

Guacaneme, E. A. (2001). Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas. Universidad del Valle.

Guacaneme, E. A. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1146/1/80_Guacaneme2002Una_RevEMA.pdf

Guacaneme, E. A. (2011). Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos. *Pensamientos, epistemología y lenguaje matemático*. Doctorado Interinstitucional en Educación. Sede Universidad del Valle. Cali.

Guacaneme, E. A. (2015). ¿Versiones históricas no multiplicativas de la proporcionalidad? In XIV *CIAEM-IACME*, Chiapas (p. 11).

Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers* (Third Edit). New York. USA: Routledge.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de Las Ciencias, 29(1), 75–88*.

Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3 y 4 de una institución educativa de la Educación Básica*. Universidad del Valle. Recuperado de https://goo.gl/L3LzI6

Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2009). *Praxeologías matemáticas en torno al número racional, las razones, las proporciones y la proporcionalidad*. Cali.

Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 17(1), 59–81*. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33530083004

Oller Marcén, A. M., & Gairín Sallan, J. M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa, 16(3), 317–338*. Recuperado de https://goo.gl/moQM0s

Rico, L., Lupiáñez, J. L., Marín, A., & Gómez, P. (2007). Matemáticas Escolares y análisis de contenido con profesores de secundaria en formación.

Romero Julio, García Gloria, N. I. (1998). El papel de los textos escolares de matemáticas en la implementación de los lineamientos curriculares: el caso del razonamiento multiplicativo. *Ecme 9, 8*. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/878/1/15Conferencias.pdf

Sánchez Ordoñez, E. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes. *Revista SIGMA, 11(1), 10–25*. Recuperado de http://revistas.udenar.edu.co/index.php/rsigma/article/view/437

Singh, P. (2000). Understanding the Concepts of Proportion and Ratio Constructed by Two Grade Six Students. *Educational Studies in Mathematics*, 43(3), 271–292. Recuperado de https://www.jstor.org/stable/3483152

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Revista Mathematics Teaching* (Gran Bretaña), 1–12.

Universidad Pedagógica Nacional. (2016). Conceptos y procesos en álgebra. Investigación en el Departamento de Matemáticas. Recuperado de https://goo.gl/oKqT8G

Valverde, G., & Castro, E. (2012). Prospective Elementary School Teachers' Proportional Reasoning. PNA, 7(2005), 1–19.