



# II CEMACYC

II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

29 octubre al 1 noviembre. 2017

Cali, Colombia

[ii.cemacyc.org](http://ii.cemacyc.org)



## ¿Enseñamos a los profesores de Matemáticas aquello que nos enseña la investigación en Didáctica sobre la derivada?

Carolina Rojas Celis  
Universidad del Bosque  
Colombia  
[carolinarojasc06@gmail.com](mailto:carolinarojasc06@gmail.com)

### Resumen

El presente documento muestra los resultados de un trabajo de investigación, propuesto como tesis de maestría, desde el campo de la Educación del Profesor de Matemáticas, en el cual se describen y clasifican investigaciones en Didáctica sobre la derivada y su posible incidencia en los cursos de formación de licenciatura en Matemáticas, sobre la enseñanza del Cálculo. Como resultados del estudio, se reconoce en Colombia, la existencia programas de licenciatura que no gozan de un espacio dentro de la formación de profesores para la enseñanza del Cálculo. No se evidencian propuestas que vinculen suficientemente los resultados de la investigación en Didáctica sobre la derivada, con la formación de profesores en dichos cursos; sin embargo, se reconocen otras formas y estrategias de concebir el curso, las cuales también buscan dotar de herramientas al futuro profesor de Matemáticas.

*Palabras clave:* Educación Matemática, Didáctica, Formación de profesores, Derivada, Enseñanza de la Derivada.

### **Presentación del problema**

La formación del profesor de Matemáticas ha sido uno de los objetos de estudio que, durante las últimas décadas, han trabajado investigadores del campo de la Educación Matemática, debido al cambio en la enseñanza de las Matemáticas; como lo señala Moreno (2005), estos cambios en la forma de enseñar, han mostrado la necesidad de formar a los futuros profesores de Matemáticas con herramientas que les permitan ser autores de cambios y propuestas para la enseñanza de temas específicos.

La inclusión de las herramientas tecnológicas en la enseñanza de las Matemáticas, la propuesta de enseñar Matemáticas para contextos específicos o la intención de formar en valores desde las mismas Matemáticas, son una muestra de aspectos que conminan a que dicho profesor requiera de elementos que le permitan adaptarse a nuevas formas de enseñar y aportar con propuestas de enseñanza que hagan más viable el aprendizaje de las Matemáticas. Es por ello que, estudiosos del campo, como Moreno (2005), evidencia la necesidad brindar a profesores de Matemáticas, en formación, herramientas a partir de cursos de didáctica o enseñanza de las Matemáticas, recibidos como parte de su formación profesoral.

Es por ello, que este trabajo de investigación, propuesto como parte de tesis de maestría, tiene como objetivo central, describir si en cursos sobre la enseñanza del Cálculo en universidades formadoras de profesores de Matemáticas, se enseña aquello que nos muestran las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas, específicamente en didáctica sobre la derivada, ya que como antecedente, se realizó una investigación sobre aquello que conciben los profesores de Matemáticas como la derivada (Rojas, 2008), evidenciándose dificultades y falencias en la comprensión del concepto. Para ello, se debió preguntar primero qué es lo que nos dicen las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas sobre la enseñanza de la derivada, así como describir los programas de enseñanza del Cálculo de tres (3) universidades formadoras de profesores de Matemáticas en Colombia: la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), Universidad Industrial de Santander (UIS) y la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC).

### **Marco de referencia**

Como marco de referencia para la clasificación de los documentos seleccionados, con el fin de responder a la primera pregunta enunciada anteriormente, ubicamos dos documentos que realizan una descripción de enfoques para los campos de interés, esto es, la Educación Matemática y la Educación del profesor de Matemáticas.

En el documento de Font (2002), para el campo de la Educación Matemática, se encuentran siete enfoques que se poseionan de manera explícita e implícita sobre los siguientes aspectos:

- Una ontología general: Responde a preguntas como ¿cuáles son las bases del conocimiento matemático? ¿cuál es la naturaleza del conocimiento matemático, y como se explican la existencia de los objetos matemáticos? Es decir, expone la teoría de la existencia relativa y el estatus del mundo y de lo que habita.
- Una epistemología general que comprende: una teoría de la naturaleza, génesis y validación del conocimiento subjetivo; una teoría de la naturaleza, génesis y validación del conocimiento objetivo; una teoría del significado y de la verdad, implicada por las

teorías sobre el conocimiento subjetivo y el objetivo.

- Una teoría sobre la naturaleza de las matemáticas.
- Una teoría sobre el aprendizaje y la enseñanza, que comprende: una teoría general sobre el aprendizaje (cómo se forma el conocimiento personal); una teoría específica sobre el aprendizaje de las matemáticas (cómo se forma el conocimiento matemático personal); una teoría de la enseñanza (los medios para facilitar el aprendizaje); una teoría de la enseñanza de las matemáticas (los medios para facilitar el aprendizaje de las matemáticas).
- Una definición del objeto de investigación de la Didáctica de las Matemáticas.
- Una metodología de investigación.

Dichos enfoques se describen brevemente a continuación:

- Enfoque cognitivo: Sus investigaciones se centran en la definición de un objeto de investigación y su metodología.
- Enfoque del constructivismo radical: Sus afirmaciones más fuertes, se hacen desde el campo de la ontología y la epistemología.
- Enfoque del constructivismo social: Plantea, que las Matemáticas son portadoras y al mismo tiempo producto de unos valores determinados. Toman interés en este enfoque, las investigaciones sobre los problemas, por ejemplo, que tienen las personas que aprenden Matemáticas en situaciones de conflicto social.
- Enfoque Sistémico: Problematiza sobre las Matemáticas que se deben enseñar, quitando así, el peso a las actividades exclusivamente mentales.
- Enfoque Antropológico: Centra su estudio en la naturaleza de las Matemáticas.
- Enfoque Sistémico: Pone en manifiesto que, para el estudio de las actividades humanas, se requiere de otros enfoques como el epistemológico, psicológico, lingüístico y sociológico.
- Enfoque Crítico: Se ocupa del estudio de aspectos como preparar a los estudiantes para ser ciudadanos, introducir las Matemáticas como una herramienta para analizar de manera crítica, los hechos relevantes socialmente, la comunicación en el aula como el conjunto de relaciones interpersonales que se consideran como bases de la vida democrática.

Otro documento que sustenta el trabajo de descripción y clasificación de documentos ubicados en el campo de la Educación del Profesor de Matemáticas, es el de Guacaneme y Mora (2011), quienes describen cuatro planos o líneas de investigación:

- La línea/plano de las prácticas profesionales de los profesores de Matemáticas que aborda el estudio de: las acciones que el profesor de Matemáticas lleva a cabo en su desempeño docente; las interacciones en las que el profesor se vincula para promover aprendizajes profesionales en comunidades de práctica; el aprendizaje que el profesor logra a partir del estudio personal/individual sobre asuntos que le conmina su práctica.
- La línea/plano conocimiento profesional del profesor de Matemáticas que se ocupa del estudio de las creencias, visiones y concepciones de los profesores de Matemáticas; los conocimientos, destrezas o competencias de los profesores y, las diferentes expresiones de la relación entre teoría y práctica.
- La línea/plano formación de los profesores de Matemáticas que contempla el estudio de: las prácticas docentes que realizan los formadores y los procesos de aprendizaje en que se

vinculan los futuros profesores o los profesores en ejercicio en el marco de programas de educación de profesores de Matemáticas y, las tareas que el formador diseña o propone en el marco de los programas de educación de profesores.

- La línea/plano conocimiento profesional del formador de profesores de Matemáticas que incluye el estudio de: las creencias, visiones y concepciones de los formadores de profesores de Matemáticas; los conocimientos, destrezas o competencias de los formadores de profesores; las diferentes expresiones de la relación entre teoría y práctica, el aprendizaje logrado a través de la práctica reflexiva y la reflexión como actividad que promueve el aprendizaje desde/para la práctica de formación de profesores de Matemáticas.

### Metodología

Para dar respuesta a la pregunta central de investigación se realizaron dos trabajos valiosos. El primero, fue la recolección 62 documentos sobre la enseñanza de la Derivada, encontrados en revistas de Educación Matemática, tesis doctorales y de maestría, así como documentos que profesores reconocidos en el campo nos compartieron para ser analizados. De estos documentos, 25 fueron finalmente seleccionados por su importancia en el campo, y nivel de citación: 17 en el campo de la Educación Matemática, y 8 para el campo de la Educación del Profesor de Matemáticas. Cada uno de los documentos seleccionados, fue ubicado en uno de los enfoques establecidos dentro de los campos.

A continuación, se enuncian los documentos que fueron clasificados en los enfoques propuestos para cada uno de los campos.

Tabla 1

*Investigaciones ubicadas en los distintos enfoques de la Educación Matemática*

El campo de la Educación Matemática	
Enfoque	Referencia
Sistémico	Montiel, (2005); Vargas, et al. (2009); Mateus (2011); Cantoral y Mirón (2000)
	Moreno y Cuevas (2004); Sánchez-Matamoros, et al. (2006); Sánchez-Matamoros, et al. (2007); Rendón y Esteban (2007); Salazar, et.al. (2009); Badillo (2003)
Cognitivo	Font (2005a); Font (2000); Font (1999); Dolores (2007); Vrancken, et al. (2008); Hähkiöniemi (2008); Font (2009); Robles, et al. (2010)
Semiótico y Ontosemiótico	

Tabla 2

*Investigaciones ubicadas en los distintos enfoques de la Educación del profesor de Matemáticas*

El campo de la Educación Matemática	
Plano/Línea	Referencia
Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas	Sánchez y Molina (2006); Pino-Fan, et al. (2011); García (2009); Pino-Fan, et al. (2012)
Prácticas profesionales del profesor de Matemáticas	Potari, Zachariades, Christou, Kyriazis y Pitta-Pantazi, (2007); Gavilán (2006)
Conocimiento profesional del formador de profesores de Matemáticas	Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2007)

Una vez realizada la clasificación de los documentos, se logró identificar qué es lo que nos dicen las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas sobre la enseñanza de la derivada. Con este conocimiento, se realizó la segunda parte de la investigación, que consistió en reconocer si en las universidades formadoras de profesores de Matemáticas, particularmente, en los cursos sobre la enseñanza del Cálculo de las tres (3) universidades estudiadas, se enseña aquello que nos muestran las investigaciones en didáctica sobre la derivada. Para ello, se realizaron entrevistas no formales con los profesores encargados de los cursos, en el año 2014, y se estudió el contenido del programa establecido y la bibliografía usada.

### Conclusiones

La clasificación de los documentos en los distintos enfoques dentro del campo de la Educación Matemática, muestran una tendencia de trabajos de investigación interesados en el conocimiento del estudiante, visto desde su estructura mental; se reconocen varios trabajos en los enfoques sistémico y semiótico, y un escaso trabajo en los enfoques socio-epistemológicos y socio-culturales.

Como aportes que se reconocen, han hecho al campo las distintas investigaciones, desde sus enfoques, se puede evidenciar que: en el enfoque cognitivo, las investigaciones describen y determinan cuál es el nivel o los niveles por los que puede pasar un estudiante para comprender el concepto de Derivada, por medio de esquemas de comprensión; en el enfoque Sistémico, se reconoce el énfasis de las investigaciones en problematizar el conocimiento matemático en sí mismo, y la importancia de generar situaciones didácticas que permitan reconocer que el conocimiento matemático que el estudiante tiene no es un proceso mental, sino que lo determinan otros factores externos; los trabajos propuestos desde el enfoque semiótico permitieron ver un estudio de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de una forma más detallada; intentan solucionar preguntas como: ¿Por qué los alumnos tienen dificultades para resolver cierto tipo de tareas?, o, ¿Es idóneo este discurso matemático, para estos estudiantes en unas circunstancias dadas?

En el campo de la Educación del profesor de Matemáticas, se reconoce un avance en investigaciones cuya intención es el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas, y la formación de los profesores de Matemáticas.

En lo que refiere a los cursos de enseñanza del Cálculo, se evidencia que la Didáctica de la derivada no es un asunto central y de continua discusión.

Se ha reconocido que la propuesta de la UPN, centra su atención en otros aspectos también importantes de la didáctica como la variación y acumulación como elementos propios del Cálculo, que hacen parte del conocimiento didáctico del contenido que un profesor de matemáticas debe tener.

La UIS, permite al docente en formación reconocer a partir de la práctica, la necesidad de tener un conocimiento sobre la enseñanza de la derivada.

La UPTC, aunque no centra su atención sobre la enseñanza de la derivada, se considera importante darlo a conocer, con el fin de exhibir que en Colombia aún hay mucho trabajo por hacer en estos cursos.

Finalmente, intentando responder a la pregunta central, si enseñamos a los profesores de Matemáticas, aquello que nos muestra la investigación en didáctica sobre la Derivada, la respuesta parece ser “no”. Sin embargo, considero, este trabajo permitió reconocer propuestas interesantes para el desarrollo de dichos cursos, como lo es la propuesta de la UIS en su curso de Didáctica del Cálculo, ya que se interesa, que sus profesores en formación, reconozcan las etapas históricas en la construcción teórica del Cálculo; a través de sus prácticas en las tutorías, con estudiantes de las distintas ingenierías de la Universidad, identifican las dificultades sobre algunos conceptos del Cálculo, y diseñan actividades que permitan a sus estudiantes fortalecerlos o comprenderlos.

Como comentario final, considero esta investigación podría dar el espacio para realizar discusiones como comunidad nacional, reconocer qué se debería enseñar en un curso sobre la enseñanza del Cálculo, a partir de las experiencias exitosas de los profesores formadores de profesores en los cursos de enseñanza del Cálculo.

### **Bibliografía y referencias**

- Badillo, E. R. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática en Colombia*. Tesis Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona-España.
- Cantoral, R., & Mirón, H. (2000). sobre el estatus de la noción Derivada: de la epistemología de Joseph Luis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática*, 3(3), 265-292.
- Dolores, C. (2007). La derivada y el cálculo. Una mirada sobre su enseñanza a través de los textos y programas. In UAG (Ed.), *Centro de investigación en Matemática*. chilpancingo: Centro de investigación en Matemática Educativa.
- Font, V. (2002). Una organización de los programas de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *EMA*, 7, 127-170.
- Font, V. (2005a). *Funciones y derivadas*. Paper presented at the XXI Coloquio distrital de matemáticas y estadística, Colombia.
- Font, V. (2000). Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo  $f(x)$ . *Uno. Revista Didáctica de las matemáticas*, 25, 21-40.
- Font, V. (1999). *Procedimientos para obtener expresiones simbólicas a partir de las gráficas. Aplicaciones de las derivadas* Universitat de Barcelona, Barcelona.

- Font, V. (2009). Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función  $f(x)=x^2$  sin usar la definición por límites. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 18, 15-29.
- Gavilán, J. M. (2006). El papel del profesor en la enseñanza de la Derivada. Análisis desde una perspectiva congitiva. *Educación Matemática*, 18, 167-170.
- García, L. A. (2009). *Un estudio sobre el conocimiento didáctico del contenido (cdc) de profesores de matemáticas que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de carreras de ciencias económicas*. Universitat Autnoma de Barcelona, Barcelona.
- Guacaneme, E., & Mora, L. (2011). La educación del profesor de matemáticas como campo de investigación. *Papeles*, 3(6), 25
- Hähkiöniemi, M. (2008). Durability and meaningfulness of mathematical knowledge: the case of the derivate concept. *PME-NA XXX*, 32(3), 120.
- Pino-Fan, L., Godino, J., Castro, W., & Font, V. (2012). Key epistemic features of mathematical knowledge for teaching the derivate. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36 Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 297-304). Taiwan: PME.
- Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica de conocimiento Didáctico-Matemático sobre la Derivada. *Educación Matemática*, 13, 141-178.
- Potari, D., Zachariades, T., Christou, C., Kyriazis, G., & Pitta-Pantazi, D. (2007). *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Paper presented at the Teachers' mathematical knowledge and pedagogical practices in the teaching of derivative, Larnaca.
- Rojas, C. (2008). *Reconstrucción del concepto de derivada en docentes de matemáticas*. Especialización en Educación Matemática, Universidad industrial de Santander, Bucaramanga-Colombia.
- Robles, M. G., castillo, A. G. D., & Font, V. (2010). *La función derivada a partir de la visualización de la linealidad local*. Paper presented at the Investigación en Educación Matemática
- Rendón, P., & Esteban, P. V. (2007). *Investigación e innovación matemática en Colombia: conocimiento profesional y competencias matemáticas*. Paper presented at the Estrategias de intervención pedagógica en el proceso de aprendizaje - enseñanza de las matemáticas para el concepto de derivada, Cali.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la Derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática*, 11(2), 267-296.
- Sánchez, M., & Molina, J. G. (2006). Pensamiento y lenguaje variacional: una aplicación al estudio de la Derivada. *Acta Latinoamericana del matemática educativa*, 19, 739-744.
- Sánchez-Matamoros, G., Blanco, M., & Llinares, S. (2006). el desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las ciencias*, 24, 85-98.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2007). Un indicador en la comprension del esquema de derivada: uso de las relaciones lógicas. In M. F. Camacho, Pablo; Bolea, María Pilar (Ed.), *Investigación en Educación Matemática*. San Cristobal de la Laguna.
- Salazar, C., Díaz, H., & Bautista, M. (2009). Descripción de los niveles de comprensión del concepto de derivada. *Tecné, epistemis y Didaxis*, 26, 62-81.
- Mateus, E. (2011). Epistemología de la Derivada como fundamento del Cálculo Diferencial. *Voces y Silencios*, 2(especial), 3-21.

- Moreno, M. M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. In A. Maz, B. Gómez & M. Torralba (Eds.), *IX Simposio de la sociedad española de investigación en Educación Matemática* (pp. 81-96). Córdoba, España: Universidad de Córdoba.
- Montiel, G. (2005). Interacciones en un escenario en línea. el papel de la socioepistemología en la resignificación de la Derivada. *Relime*, 8(2), 219-235.
- Moreno, S., & Cuevas, C. A. (2004). Interpretaciones erróneas en los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo diferencial. *Educación Matemática*, 16(1665-52826), 93-104.
- Vargas, A. R., Torres, M. A., & Quintero, N. L. (2009). *La derivada a la Caratheodory, una nueva concepción en el aprendizaje y enseñanza del Cálculo*. Nariño, Colombia.
- Vrancken, S., Engler, A., & Müller, D. (2008). Una propuesta para la introducción al concepto de derivada desde la variación. *Revista Premisa*, 10(38), 36-45.