



II CEMACYC

II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

29 octubre al 1 noviembre. 2017

Cali, Colombia

ii.cemacyc.org



CIAEM
CME
desde - since 1961



Desenvolvimento de pensamento algébrico no currículo de escola básica: caso de modelagem pictórica da Matemática de Singapura

Yuriko Yamamoto **Baldin**

Universidade Federal de São Carlos

Brasil

yuriko@dm.ufscar.br

Resumo

O ensino da álgebra constitui uma dificuldade para os professores de matemática do ensino fundamental, devido à complexidade da linguagem de representação, própria da abstração matemática. As investigações sobre o pensamento algébrico ao longo do currículo escolar indicam a importância da fase intermediária da pré-álgebra, entre anos iniciais e finais, que requer um ensino e aprendizagem nos anos iniciais que tornem a transição efetiva. O objetivo deste trabalho é discutir, sob a ótica de formação de professores dos anos iniciais, a evolução do pensamento algébrico que pode ser trabalhada por meio do modelo pictórico da Matemática de Singapura. A metodologia se baseia em análise qualitativa de uma sequência de atividades selecionadas de uma coleção de livros didáticos da Singapura, pelas competências esperadas pelo currículo do ensino básico. Concluímos que a coleção apresenta uma proposta adequada para a aprendizagem dos professores sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico para transição na pré-álgebra.

Palavras chave: conhecimento de matemática para ensino, conhecimento pedagógico de conteúdo, desenvolvimento de pensamento algébrico para a pré-álgebra, formação de professores de anos iniciais, modelagem por barras da Matemática de Singapura.

Introdução

Este texto baseia a conferencia “Desarrollo de pensamiento algebraico en el currículo de la escuela básica: caso de modelización pictórica de Matemática de Singapur”.

Os professores na sala de aula e também matemáticos e educadores enfrentam, com frequência, o desafio de responder à questão recorrente dos alunos “Por que temos que aprender álgebra?”. A abstração do raciocínio matemático que envolve dimensões intuitiva, indutiva e

dedutiva se mostra mais contundente na área da álgebra que trabalha uma linguagem simbólica da matemática, que contribui sobremaneira ao avanço do conhecimento científico de variadas formas, há muitos séculos, e às aplicações no mundo em que vivemos. Desta forma, a álgebra está presente no currículo escolar atual como um tópico essencial da educação básica, para a formação dos cidadãos do século 21.

Matemáticos como Stewart (1995), Wu (2009), mostram o entendimento dos avanços da Matemática como disciplina, cuja trajetória envolveu sempre a descoberta e inclusão de novos conceitos a partir do conhecimento anterior, ao longo dos tempos.

Por outro lado, Stewart aponta na página 1 da obra citada que, nas escolas, muitos novos conceitos são introduzidos sem haver compreensão de como eles se relacionam com a matemática tradicional em execução. Da mesma forma, Wu (2009) aponta a lacuna que existe entre a aritmética dos primeiros 5 anos do ensino básico e a álgebra dos 8º e 9º anos, lacuna que corresponderia à necessária fase de transição, a fase da pré-álgebra.

No contexto das escolas brasileiras, apesar da indicação nos documentos (Brasil, 1998) e nas recomendações curriculares dos cursos de formação de professores sobre a necessidade de aprender e ensinar com compreensão conceitual e aplicações dos conceitos matemáticos, o ensino tende a ser procedimental e, especialmente a álgebra é entendida como manipulação de fórmulas e expressões com símbolos e letras, cujos significados variam conforme o contexto (matemático ou na resolução de problemas), mas não reconhecidos ou trabalhados com conexões na sala de aula. Logo, esta visão do papel da álgebra na prática escolar está longe do pensamento matemático que se deseja como meta educacional da matemática. Stewart (1995, p. 5) advoga que o pensamento matemático começa com uma intuição diante de situação problema antes de qualquer formalismo, e que a intuição embasa futura formalização de deduções. Embora esta visão seja um consenso entre os matemáticos e educadores, existem dificuldades de abordagem da problemática de trazer efetivamente para a formação de professores as metodologias que percorram a trajetória de desenvolvimento do pensamento matemático, em particular do pensamento algébrico.

Há boas referências que se apoiam na estrutura organizada dos conceitos matemáticos para explicar aos futuros professores a abordagem matemática do conteúdo para o ensino de tópicos do currículo escolar, como (Wu, 2009), (French, 2002) e outros, porém, no nosso entendimento, o enfoque direcionado “da matemática para atividade escolar”, com conteúdo que almeja, mesmo implicitamente, a álgebra elementar do ensino médio, não ajuda em geral a formação dos professores dos anos iniciais, que não recebem educação especializada em matemática, e cujas visões da matemática estão aquém da compreensão que o tema requer. Queremos dizer que há necessidade de abordar também na direção de baixo para cima, isto é, do conteúdo escolar nas áreas de Números e Aritmética, Formas/Geometria, Medidas de Grandezas e Linguagem de Representação de Informações, com suas pedagogias naturais e apropriadas ao desenvolvimento da criança desde os primeiros anos, na desejada direção da sistematização dos conceitos e ideias da matemática na transição pela pré-álgebra, desenvolvendo o pensamento matemático.

Referencias da pesquisa em educação matemática

A preocupação dos pesquisadores em educação matemática, na perspectiva de viabilizar a educação escolar que desenvolva o pensamento algébrico a partir do ensino significativo da

matemática desde os anos iniciais, vem de longa data. Nos referimos a trabalhos do Mathematics Learning Study Committee do PME, especialmente o livro que sistematiza as contribuições das investigações dos anos 90, (Kilpatrick et al, 2001). Na página 314 desta obra, no capítulo “da Aritmética para Números”, encontramos considerações como “Em geral, o pensamento aritmético dos estudantes... da escola elementar é diferente do pensamento que é central à álgebra”. Ainda, para ajustar a novas demandas cognitivas que advém desta constatação, a referência cita “Enquanto a aritmética focaliza em números e respostas numéricas, a álgebra escolar focaliza relações”.

Isto significa que o pensamento numérico cresce de maneira contínua para desenvolver um pensamento algébrico, mantendo os significados do pensamento numérico adquirido. Outra referência importante é o trabalho de (Kaput, 1995) que advoga o desenvolvimento do pensamento algébrico na escola elementar baseado, entre outros princípios, em dois que destacamos: - de iniciar cedo, em parte construindo sobre o conhecimento informal que os alunos trazem; - de construir sobre o potencial cognitivo e linguístico existente nos alunos.

Ainda desta referência, aprendemos que, como fontes de generalização e formalização, Kaput indica *o raciocínio e a comunicação com linguagem matemática ou em situações-problemas contextualizadas*, que usualmente começam na aritmética e raciocínios quantitativos de grandezas. A conexão entre essas fontes é especialmente problemática nos anos iniciais quando a atividade matemática é estimulada por meio de materiais concretos.

Isto implica em uma questão de investigação: Como estimular o desenvolvimento de pensamento algébrico a partir de noções básicas da aritmética presentes nos currículos dos anos iniciais da educação básica?

Materiais Didáticos e Formação de Professores

Diversos países e seus currículos se dedicam a esta questão desenvolvendo material didático para uso na sala de aula, que tenha como objetivo primordial o desenvolvimento de pensamento matemático dos alunos, planejando cuidadosa e coerentemente o currículo escolar. Para que o material didático atinja este objetivo, os professores do ensino básico precisam conhecer profundamente o seu conteúdo, tanto sob ponto de vista de significado conceitual como de metodologias adequadas, diversificadas e sequenciadas para promover a aprendizagem significativas dos alunos.

Isto quer dizer que os livros didáticos e seus guias para professor são fonte de aprimoramento profissional, constituindo instrumento de aprendizagem para quem não estudou a matemática de nível superior dos professores de anos finais da educação básica.

Neste sentido, é notório o movimento nos países que desenham seus currículos de matemática dos anos iniciais em torno da Resolução de Problemas que trabalha, junto com as competências de linguagem e comunicação, a construção de significados dos conceitos, as técnicas algorítmicas e operacionais, desenvolvimento da capacidade de propor estratégias e compreender as dos outros, investigar a validação de soluções e suas extensões. São itens do desenvolvimento de raciocínio matemático. Japão, Coreia do Sul, Singapura são alguns países que podemos citar por supremacia de seus livros didáticos escolares com o enfoque mencionado. Em especial, a abordagem do pensamento algébrico a partir da aritmética dos anos iniciais, respeitando a trajetória de material concreto, representação pictórica antes de abstração com

linguagem simbólica, é observada consistentemente em livros do Japão como (Isoda et al, 2011) e Singapura (Kheong et al, 2008), editados em inglês. A publicação (Cedillo et al, 2013), em espanhol, de guia para aprendizagem e ensino de aritmética, geometria e medição, é um exemplo representativo do material eficaz para curso de formação inicial e continuada de professores dos anos elementares, baseada em coleção japonesa, que vai além de simples orientação das atividades para uso em sala de aula, sendo um verdadeiro material de formação de professores dos anos iniciais. Outros países como Tailândia, Chile, Costa Rica também trabalham seus currículos de formação de professores em torno da capacitação em ensino de matemática com enfoque de resolução de problemas que promovem o desenvolvimento de pensamento matemático.

A coleção (Kheong et al, 2008) da Singapura é a coleção escolhida por projeto de investigação em que se baseia este trabalho. Existem semelhanças entre livros japoneses e esta coleção, no que se refere a uso de modelos pictóricos para trabalhar a transição do material concreto para representação simbólica da aritmética, e logo, a exploração das estruturas algébricas da aritmética. A escolha da coleção da Singapura para trabalhar no nosso projeto se deve ao Modelo de Barras característico da Matemática de Singapura, e sua abordagem amigável e atenciosa em detalhes sutis que facilitam aos professores a análise dos pontos críticos nos quais se evidenciam os avanços no pensamento algébrico. Por outro lado, percebemos na coleção japonesa uma introdução precoce da representação de números na reta numérica em paralelo com modelo pictórico, uma abordagem defendida por (Wu, 2009), que consideramos adequado mas sofisticado por ser um trabalho de mais uma técnica da matemática, que na coleção de Singapura é adiada sem prejuízo de rigor. A abordagem da coleção da Singapura é nesse sentido intuitiva e amigável, o que facilitou a análise da professora de anos iniciais.

Este trabalho tem como objetivo contribuir como um material para a formação de professores não especialistas de matemática nos anos iniciais da educação básica, que são agentes fundamentais no desenvolvimento do raciocínio algébrico dos alunos, antes desses chegarem à fase da pré- álgebra, quando os professores com formação específica em matemática trabalham a transição para a algebrização. Os exemplos que ilustram este trabalho são da Coleção “My Pals are Here!” (Kheong et al, 2008), com autorização concedida pela Marshall Cavendish Education, Singapore. A análise dos exemplos foi conduzida com objetivo de compreender como uma sequencia concebida cuidadosamente numa coleção didática pode percorrer a trajetória de aprendizagem dos alunos e amadurecimento dos conceitos e procedimentos matemáticos que desenvolvem o raciocínio algébrico, como esperado no currículo dos anos iniciais do ensino básico.

Exemplos da Matemática de Singapura e uma análise qualitativa

Nesta seção, apresentamos exemplos mais significativos dos momentos em que a análise das atividades apontou o avanço no conceito algébrico, baseados, mas sem esgotar, no trabalho de investigação realizada em (Dotti, 2017). Para limitar o foco da discussão, não vamos neste texto discutir as características essenciais da Matemática de Singapura que atraem a atenção da comunidade de educação matemática em nível global, mas sim concentrar em papel do modelo pictórico no desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais.

No primeiro livro, os estudos se iniciam com a contagem do 1 ao 10, primeiro com a contagem de objetos e a representação de cada número, como é usual em livros didáticos em

geral. Nas atividades de contagem de objetos representados nas figuras e a escrita/leitura do número que representa a quantidade, o aluno exercita o primeiro registro com símbolos matemáticos e o conceito de 0, correspondendo à ausência de quantidade.

O aluno também é apresentado a um objeto especial, um material cúbico que se encaixa um ao outro por extremidades. Cada peça representa uma “unidade” na contagem.

Nas atividades diversas de contagem de objetos, a ideia fundamental de “comparação” entre quantidades é trabalhada na contagem de agrupamentos de quantidades distintas, introduzindo o conceito de “mais que”, “menos que”, “igual”, e logo abstraído para o conceito de “ordem” nos números. Em seguida, o conceito básico de “partes” de um número (ainda até 10) é intensamente trabalhado dentro de atividades de decomposição, sejam lúdicas ou não. Notamos então as ideias de “parte-todo” e “comparação”, que permeiam a matemática de Singapura, sendo iniciadas desde as primeiras atividades.

Essas ideias fundamentais já se conectam com “relações” entre números, uma ideia algébrica. As diferentes possibilidades de decomposição de um número são exercitadas por meio de junção de peças formando uma barra representando a quantidade do número inicial. Foi analisado que a visualização e a manipulação de objetos com formato de barras facilitam a representação pictórica de quantidades, por meio do Modelo de Barras, nos anos seguintes.

A Figura 1 a seguir ilustra uma atividade do 1º ano que aproveita o conceito de composição e decomposição de um número, em que percebemos a ideia algébrica que prepara o conceito de equação (igualdade entre números, no caso), assim como o raciocínio de diversas possibilidades de decomposição que traz a ideia de variabilidade e prepara as ideias de incógnita numa equação em contexto de anos posteriores. O exercício da Figura 1 consiste de uma proposta para decompor o número 7 de várias maneiras e usar a “balança” para compreender o significado. Atividades planejadas com claro objetivo curricular permeiam esta proposta.

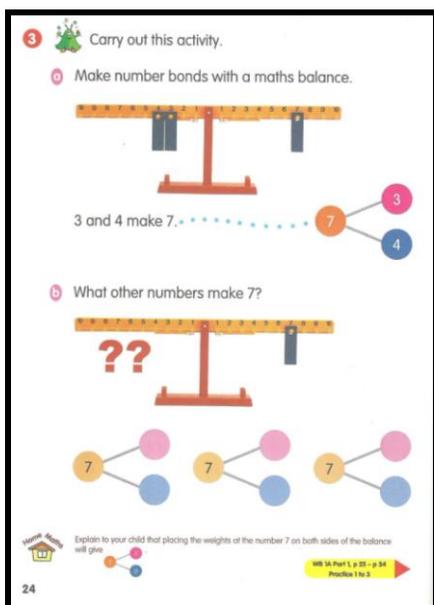


Figura 1: Pág. 24 Livro 1A © Marshall Cavendish Education. Adapted with permission

Ainda neste exercício, percebe-se a preparação do pensamento sobre o princípio da adição, mesmo antes de introduzir a operação de adição e seu algoritmo. É interessante também observar

no final do exercício, a proposta de uma situação desafio, em que se considera a situação de colocar o 7 em ambos os lados, estimulando assim o aluno a considerar que o 7 (todo) pode ser comparado com o próprio 7 (parte), logo 7 se decompõe com as partes 7 e 0, em que 0 representa o “nada” para a criança, o futuro conceito de “elemento neutro” da adição.

Na Figura 2 a seguir, o conceito de “decomposição de um número em partes” retorna numa atividade lúdica. Observamos a proposta inteligente de estimular o pensamento algébrico num raciocínio inverso dentro de uma situação de princípio aditivo estudado nas atividades de decomposição de números. Isto é, no jogo de dois baldes, sabendo-se o todo, por exemplo 6 bolinhas no caso 1, e levantando-se o balde da direita e vendo 2 bolinhas, o aluno deverá adivinhar quantas bolinhas estão debaixo do balde à esquerda. Trabalha-se a ideia de subtração como operação dual na situação de decomposição, ao mesmo tempo que estimula o raciocínio algébrico com a noção de incógnita numa situação de equação, que será necessário identificar nos anos finais do ensino fundamental. Notamos que este exercício mais uma vez trabalha o conceito do número 0 no item três, em que não há nenhuma bolinha debaixo do baldinho do meio.

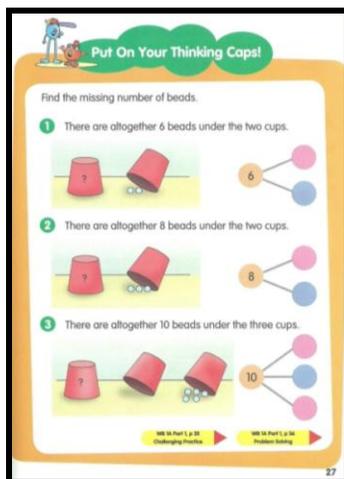


Figura 2: Pág. 27 do livro 1A© Marshall Cavendish Education. Adapted with permission

A aritmética é retomada com os números até 20, repetindo o ciclo de exercícios de contagem de objetos, a partir do número 10, formando os números de 11 a 20. A técnica de decomposição é retomada com esses números de diversas formas, incluindo uma proposta adicional de propor que fixe uma das partes da decomposição como 10, introduzindo à representação decimal e seu significado, pois a outra parte resgata o conhecimento consolidado até então, representando as unidades na representação decimal. A professora pedagoga compreendeu nesta atividade a proposta de consolidar a ideia de “dezena” como ingrediente essencial no sistema de representação decimal dos números, e o modelo de barras antecede mesmo a introdução de material padronizado como o material dourado.

A Figura 3 abaixo ilustra a página do Guia do professor da atividade, ainda para o 1º ano, da integração de diferentes linguagens de representação no trabalho da técnica de subtração, onde é possível ver o algoritmo trabalhado com significado mediado por modelo pictórico, material concreto se necessário, e a organização do registro da operação aritmética. As páginas do Guia do professor contêm orientações sobre possibilidades de condução na sala de aula, com sugestões de questionamentos ou de desdobramentos possíveis.

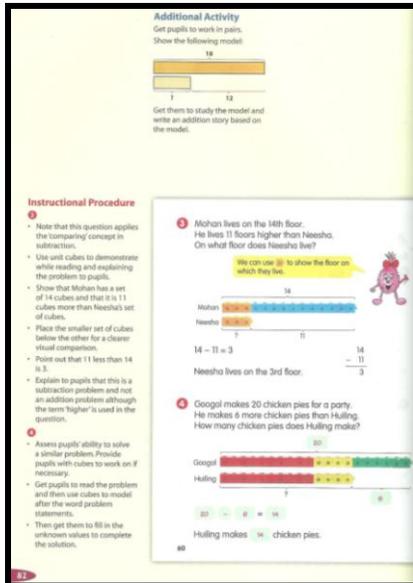


Figura 3: Pág. 82 do Guia do Professor 1B © Marshall Cavendish Education. Adapted with permission

O projeto de investigação analisou todos os anos (1º a 6º) da coleção. Devido à limitação de páginas deste texto, não podemos apresentar a análise completa. Porém, destacamos que é no livro do 2º ano que aparece um passo decisivo no processo de abstração para o raciocínio algébrico, que conecta a parte elementar de visualização de objetos concretos do cotidiano com a linguagem de representação por modelo de barras. A atividade permite estender a abstração de números, que representam quantidades discretas, para outros “números” que aparecerão num contexto de quantidades de natureza distintas, por exemplo frações e números decimais.

O exemplo- chave neste ponto de salto cognitivo que destacamos aparece na página 60 do livro 2A.

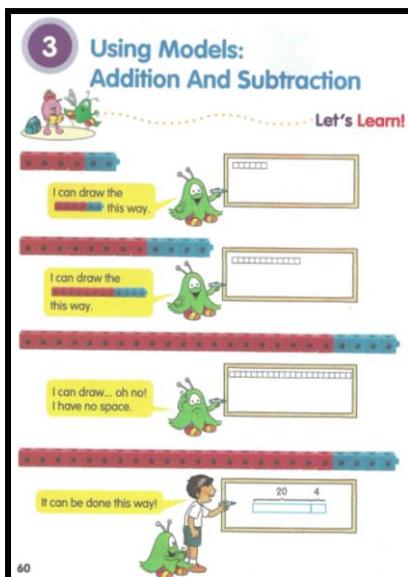


Figura 4: Pág. 60 do livro 2A© Marshall Cavendish Education. Adapted with permission

A atividade da Figura 4 apresenta uma situação problema de limitação do material concreto para representar barras com quantidade grande de “peças unidade”, cujo registro na lousa ou folha de papel (também espaços limitados) estaria dificultado. Um diálogo descrito na atividade leva à estratégia de “desenhar” (modelizar) uma barra de *tamanho qualquer* que “represente” a quantidade desejada, e que o modelo tenha as “informações” (dados) que representem as “relações” entre as quantidades, rompendo neste ponto a barreira de dependência de “objeto concreto para manipular”, para visualizar *modelos pictóricos* para compreender dados de situações problema, sejam essas da própria matemática ou aplicações em problemas contextualizados. O Modelo de Barras mostra um forte poder pedagógico especialmente na resolução de problemas, quando permite visualização de dados com suas propriedades matemáticas e “relações” algébricas (álgebra da aritmética) como estratégia de passagem segura para a fase da pré-álgebra.

Conclusão

A análise das atividades, com olhar atento sobre o significado e o papel das mesmas dentro do currículo escolar, permite ao professor dos anos iniciais uma aprendizagem de como promover o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de abordagem correta dos conteúdos que estão propostos no currículo escolar. Consideramos que o projeto deve continuar ampliando a investigação sobre as conexões do ensino nos anos iniciais com o ensino dos anos finais, para haver a desejada integração da matemática escolar com a matemática que os estudantes precisam saber. A coleção mostrou possibilidades de analisar as evidências para a continuidade do projeto.

Agradecimentos: Agradecemos o apoio da Marshall Cavendish Education pela permissão concedida para usar sua publicação e algumas páginas para ilustrar os resultados do projeto e sua divulgação.

Referencias

- BRASIL (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental*. Brasília: MEC/SEF
- Cedillo, T. et al. (2013). *Matemáticas para la Educación Normal. Guía para el aprendizaje y enseñanza de la aritmética, la geometría y la medición*. Pearson Education. Mexico
- Dotti, T.G. (2017). Um estudo do Modelos de Barras nos livros didáticos da matemática de Singapura: fundamentação da álgebra no ensino fundamental 1º ciclo, Dissertação de Conclusão de Curso. UFSCar
- French, D. (2002). *Teaching and Learning Algebra*. Continuum. London
- Isoda, M., et al. (2011). *Study with your Friends: Mathematics for Elementary School*, Tokyo: Gakko tosho.
- Kaput, J. (1995). *Teaching and Learning a New Algebra with Understanding*. National Centre for Improving Students Learning & Achievement in Mathematics and Science
- Kheong, F.H. et al. (2008). *My Pals are Here!* Marshall Cavendish International. Singapore.
- Kilpatrick, J. et al. (Eds) (2001). *Adding Up: Helping children learn mathematics*. The National Academic Press. Washington
- Stewart, I. (1995). *Concepts of Modern Mathematics*. NY: Dover
- Wu, H.H. (2009). *From arithmetic to algebra*. Eugene University. Oregon.