



II CEMACYC

II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

29 octubre al 1 noviembre. 2017

Cali, Colombia

ii.cemacyc.org



CIAEM
CME
desde - since 1961



¿Cómo determinar el nivel de dificultad de un problema a través de procesos matemáticos?

Ricardo **Poveda** Vásquez

Escuela de Matemática, Universidad Nacional

Costa Rica

ricardo.poveda.vasquez@una.cr

Resumen

Al trabajar con la resolución de problemas en la mediación pedagógica y en la evaluación, algunas veces surgen dudas sobre el nivel de dificultad de un problema y se asigna alguno sin ningún análisis matemático y pedagógico. En este minicurso se realizará un análisis profundo a cada problema que incluye: áreas, habilidades y conocimientos matemáticos, así como el grado en que se involucran estos cinco procesos matemáticos: razonar y argumentar, plantear y resolver problemas, conectar, comunicar y representar. Estas herramientas permiten decidir con mayor claridad sobre el nivel de complejidad de un problema.

Palabras clave: resolución de problemas, planteo de problemas, procesos matemáticos, habilidades matemáticas, competencias.

Introducción

En el año 2012 el Ministerio de Educación Popular (MEP) de Costa Rica aprobó un nuevo programa de estudios para la educación primaria y secundaria. Este plan de estudios plantea la Resolución de Problemas como estrategia metodológica, es decir, enseñar matemática a través de problemas contextualizados (MEP, 2012). Estos programas de estudios distan mucho en contenido y calidad de los programas de estudio anteriores (MEP, 1995a, 1995b, 1995c, 1996) que tenían muchas debilidades (Ruiz, Chavarría y Mora, 2003; Ruiz, 2013).

Por lo anterior, los docentes en ejercicio se han enfrentado a una nueva disyuntiva: el planteo de problemas para la mediación pedagógica y para la evaluación. (Espinoza, 2013). Este planteo se da de varias formas: haciendo problemas originales o readecuando otros que se encuentran en la literatura. (Silver, 1994; Silver y Cai, 1996).

El docente puede asignarle un nivel de dificultad al problema, en primera instancia resolviéndolo y tomando en cuenta los conocimientos previos para su resolución. También al

considerar los conocimientos matemáticos que se trabajan y el nivel educativo para el que se crea el problema.

Sin embargo, el análisis de un problema o tarea matemática para determinar el nivel de complejidad va más allá de lo expuesto anteriormente. Es necesario hacer un estudio sobre las áreas matemáticas involucradas en la resolución del problema, así como las habilidades específicas que se trabajan. También el análisis de los procesos matemáticos y en qué medida se ven involucrados en el problema es determinante para deducir el nivel de complejidad del mismo.

El currículo en Costa Rica

El estudio que se realizará a los problemas en este documento se basa en los programas de estudio de matemática de primaria y secundaria de Costa Rica. En los mismos se establecen cinco áreas matemáticas: Relaciones y Álgebra, Estadística y Probabilidad, Números, Medidas y Geometría. Todas las áreas se trabajan en todos los años escolares a través de habilidades específicas que según MEP (2012) se definen como:

una capacidad o un saber hacer en relación con un objeto matemático (concepto o procedimiento).

...las habilidades siempre están asociadas a un área matemática (habilidades aritméticas, habilidades geométricas, habilidades algebraicas, etc.); están asociadas a conocimientos matemáticos. Las habilidades específicas se plantean para desarrollarse en tiempos relativamente cortos. No se deben ver como capacidades que se tienen o no (u fines logrados o no) sino como expectativas de aprendizaje que se pueden lograr gradualmente. Las habilidades específicas se podrían visualizar como objetivos curriculares específicos, aunque no de la manera propuesta por el conductismo (“objetivos operativos” observables, medibles, cuantificables). Estas habilidades alrededor de conocimientos se pueden agrupar, de manera que se trabajen de esa manera tanto en la acción de aula como en la evaluación. (p. 22).

Este texto da una primera idea sobre la necesidad de agrupar habilidades para trabajar en el aula, es decir, que con un problema se pueden abarcar varias habilidades específicas, inclusive de áreas matemáticas distintas, precisamente Ruiz (2015) así lo plantea: “un buen problema puede servir para activar varias habilidades específicas que se encuentren relacionadas entre sí.” (p. 41).

Por otro lado, para MEP (2012), se establecen cinco procesos matemáticos que son

...actividades cognitivas (o tipos de actividades) que realizan las personas en las distintas áreas matemáticas y que se asocian a capacidades para la comprensión y uso de los conocimientos. La realización sistemática de estos procesos transversales en la acción de aula apoya el progreso de diversas dimensiones de la competencia matemática.

Vale decir que estos procesos matemáticos no son capacidades pero apoyan su desarrollo, y además tienen numerosas intersecciones entre sí. (p. 24).

Otra vez se insiste en la intersección que existe de estos procesos en la resolución y análisis de un problema, así como el grado de utilización de cada uno de ellos. Los cinco procesos que se establecen en este currículo son:

Razonar y argumentar: actividades mentales que se generan cuando se deduce, induce, compara, razona, identifica, generaliza, justifica, demuestra, conjetura y se hace un manejo fluido de conceptos y operaciones matemáticas.

Plantear y resolver problemas: capacidades mentales donde intervienen todas las acciones en la búsqueda de soluciones (si existen) de un problema. Estas acciones pueden ser sencillas o complejas. También se presenta acá el planteo de situaciones a partir de un conocimiento matemático.

Representar: Busca pasar de una representación a otra en las diferentes nociones matemáticas, así como la manipulación y entendimiento de éstas.

Conectar: como ya se comentó anteriormente, normalmente los problemas conectan áreas matemáticas, por ejemplo, a veces es necesario el uso de conocimientos de las áreas de Estadística y de Números para la resolución de una tarea matemática. Precisamente en este proceso se pretende esto y no solo con áreas, sino conexión de habilidades específicas dentro de una misma área. Incluso la conexión de la Matemática con otras disciplinas.

Comunicar: la comunicación matemática es muy importante tanto para que un estudiante entienda lo que un problema demanda, como para dar respuesta al mismo. Esta comunicación puede ser escrita, verbal, visual e inclusive con gestos.

Al realizar el análisis de la resolución de problemas, los procesos no se trabajan de igual grado necesariamente, por ejemplo, en el caso del proceso *Representar*, es diferente el grado de intervención en un problema donde sólo se utilice una representación a otro donde haya que trasladarse de una representación a otra para su resolución.

Niveles de dificultad de un problema

Cada problema se puede categorizar, de acuerdo con su nivel de dificultad, de diversas maneras. MEP (2012) y OCDE (2004) proponen una categorización: Reproducción, Conexión y Reflexión. En MEP (2012) se definen así:

Reproducción. En esencia se refiere a ejercicios relativamente familiares que demandan la reproducción de conocimientos ya practicados. Apelan a conocimiento de hechos y representación de problemas comunes, reconocimiento de cosas equivalentes, recolección de objetos matemáticos o propiedades, procedimientos rutinarios, aplicación de algoritmos estándar, manipulación sencilla de expresiones que poseen símbolos, fórmulas y cálculos sencillos. (p. 32).

Conexión. Se basa en capacidades que intervienen en el nivel de reproducción, pero va más lejos. Remite a la resolución de problemas que no son rutinarios pero se desarrollan en ambientes familiares al estudiante, la interpretación con exigencias mayores que en el grupo de representación, y algo que lo define: la conexión entre los diversos elementos, en particular, entre distintas representaciones de la situación. (p. 33).

Reflexión: El elemento significativo es la reflexión, realizada en ambientes que son más novedosos y contienen más elementos que los que aparecen en el otro nivel de complejidad. Se plantea aquí la formulación y resolución de problemas complejos, la necesidad de argumentación y justificación, la generalización, el chequeo de si los resultados corresponden a las condiciones iniciales del problema y la comunicación de esos resultados. Se exige la participación de varios métodos complejos para su solución. (p. 33).

Lo anterior da una idea de cómo se podría categorizar un problema, sin embargo no es suficiente. Es necesario un análisis detallado de las áreas, conocimientos, habilidades y procesos que intervienen en la solución. Para ver eso se realiza un estudio detallado de dos problemas basados en un mismo contexto.

Tabla 1

Cantidad de Niacina presente en algunos alimentos.

Niacina en los alimentos		
	Cantidad de Alimento	Niacina (en mg)
Arroz blanco común cocido	1 taza	2,32
Aguacate	½ aguacate	1,62
Huevo entero, crudo	1	0,03
Papa horneada	1 (150 gramos)	2,17
Maní	30 gramos	3,80
Mango	1	1,5

Fuente: información de diferentes sitios web

Problema 1
¿Qué cantidad de Niacina contiene 1 aguacate, 1 mango y 30 gramos de maní?

Problema 2
Si un niño de 9 a 13 años necesita consumir 12 mg de vitamina B3 (Niacina) al día. Elabore un menú que tenga al menos tres de estos alimentos y que cubra la cantidad de Niacina que necesita diariamente un niño de esta edad. El menú puede contener hasta 1,5 mg de Vitamina B3 más de la necesaria.

Solución Problema 1

Para responder este problema basta realizar una operación combinada: un aguacate aportaría 2 veces 1,62 mg, 1 mango aporta 1,5 mg y el maní aportaría 3,80 mg, por lo que en total sería de $2 \cdot 1,62 \text{ mg} + 1,5 \text{ mg} + 3,80 \text{ mg} = 8,54 \text{ mg}$ de Niacina.

Análisis del Problema 1

Año lectivo:

Sexto año escolar (Niños de 12 años)

Áreas involucradas:

Números y Medidas

Habilidades específicas que se trabajan:

Aplicar las diversas medidas en la resolución de problemas dados en situaciones ficticias o del entorno. (MEP, 2012, p. 226).

Resolver y plantear problemas donde se requiera el uso de la suma, la resta, la multiplicación y la división de fracciones y números con decimales. (MEP, 2012, p. 191).

Conocimientos matemáticos:

Medidas de masa

Operaciones con números decimales

Procesos matemáticos involucrados:

Razonar y argumentar: este proceso se trabaja levemente pues para resolver el problema se plantea un contexto y se debe identificar la información dada en el mismo, así utilizar los datos necesarios y descartar los que no son necesarios. Posterior a esto es solo resolver una operación aritmética.

Plantear y resolver problemas: este proceso se trabaja levemente ya que el problema solo admite una única solución y los datos están dados de una forma sencilla. No es necesario el planteo de otros problemas.

Conectar: este proceso se trabaja medianamente pues se da una conexión de las áreas de Números y Medidas.

Comunicar: este proceso se trabaja muy levemente ya que al resolver el problema solo se debe comunicar la respuesta que es un número.

Representar: este proceso se trabaja levemente ya que la información está dada en una tabla de forma explícita y el problema se resuelve utilizando esta única representación.

Nivel de dificultad

Reproducción: como se puede observar en cada proceso, el nivel de intervención en cuatro de los cinco procesos es leve, esto se da porque el problema es sencillo.

Solución del Problema 2

Existen múltiples soluciones para este problema, un ejemplo de menú es

Tabla 2

Ejemplo de menú que contempla la cantidad de Niacina para un niño de 9 a 13 años.

	Cantidad de Alimento	Niacina (en mg)
Arroz blanco común cocido	2 tazas	$2,32 \times 2 = 4,64$
Aguacate	½ aguacate	1,62
Papa horneada	2 (300 gramos)	$2,17 \times 2 = 4,34$

Mango	1	1,5
Total		12,1

Fuente: Tabla 1

Análisis del Problema 2

Año lectivo:

Sexto año escolar (Niños de 12 años)

Áreas involucradas:

Números y Medidas

Habilidades específicas que se trabajan:

Aplicar las diversas medidas en la resolución de problemas dados en situaciones ficticias o del entorno. (MEP, 2012, p. 226).

Resolver y plantear problemas donde se requiera el uso de la suma, la resta, la multiplicación y la división de fracciones y números con decimales. (MEP, 2012, p. 191).

Utilizar la calculadora para resolver problemas y ejercicios numéricos con cálculos complejos. (MEP, 2012, p. 192).

Conocimientos matemáticos

Medidas de masa

Operaciones con números decimales

Procesos matemáticos involucrados:

Razonar y argumentar: este proceso se trabaja fuertemente pues para construir un menú con todas las características que plantea el problema es necesario un manejo fluido de los conceptos de masa y fracción; y operaciones a realizar, tanto las multiplicaciones, sumas, restas y la combinación de éstas, así como establecer razonamientos matemáticos válidos tomando en cuenta los intervalos de respuesta al problema.

Plantear y resolver problemas: este proceso se trabaja en un nivel medio pues es necesario plantear una estrategia correcta para resolver el problema, que al tener múltiples respuestas, se vuelve interesante y tal vez poco común.

Conectar: este proceso se trabaja fuertemente ya que el problema es de contexto real y conecta conceptos matemáticos (medidas de masa) y procedimientos (operaciones matemáticas con decimales y fracciones) de diferentes áreas matemáticas.

Comunicar: este proceso se trabaja fuertemente ya que para dar respuesta al problema (que no es de solución única), es necesaria una argumentación matemática y luego expresar las conclusiones, en este caso el menú solicitado. La forma de comunicar la respuesta es abierta es decir, se puede dar textual, en una tabla e inclusive verbalmente.

Representar: este proceso se trabaja en un nivel medio ya que la información está dada en forma tabular y se debe interpretar y razonar, descartando la información innecesaria para crear el menú solicitado con los criterios dados.

Nivel de dificultad

Reflexión: como se puede observar en cada proceso, el nivel de intervención es mediano o alto, por lo que se trata de un problema con un nivel alto de dificultad para el año escolar correspondiente.

Como se puede observar del análisis, tanto el contexto, las áreas, habilidades específicas y los conocimientos son similares en ambos problemas. Es decir, ni el contexto ni los elementos anteriores determinan que tan fácil o difícil es un problema. Esto no sucede así con los procesos matemáticos, en la siguiente tabla se resume el grado de involucramiento de cada uno de ellos.

Tabla 3

Comparación de nivel de involucramiento de los procesos matemáticos del Problema 1 y el Problema 2

	Problema 1	Problema 2
Razonar y argumentar	Leve	Alto
Plantear y resolver problemas	Leve	Medio
Conectar	Medio	Alto
Comunicar	Leve	Alto
Representar	Leve	Medio
NIVEL DE DIFICULTAD	Reproducción	Reflexión

Fuente: Datos propios

En la Tabla 3 se observa la diferencia entre ambos problemas según el nivel de involucramiento de los procesos matemáticos. El Problema 1 se categoriza de *reproducción* tomando en cuenta la poca participación de los procesos, mientras que el Problema 2 es de *reflexión* por la fuerte participación de los mismos.

Conclusiones

Asignarle el nivel de dificultad a un problema es una tarea compleja y no puede ser subjetiva. Es necesario un análisis profundo de diferentes aspectos que van desde el año escolar en el cual se plantea la tarea hasta el nivel de involucramiento de cada uno de los procesos matemáticos que se activan. De este análisis surgen aspectos interesantes.

En primer lugar, el contexto de un problema no determina su nivel de dificultad. Por ejemplo, los problemas 1 y 2 presentados en el documento se basan en el mismo contexto y ambos, después de realizar el análisis, son de diferente nivel de dificultad.

En segundo lugar, las áreas, habilidades y conocimientos matemáticos implicados no determinan el nivel de dificultad, sin embargo es importante conocer esta información pues en el análisis de los procesos se utiliza. Precisamente este análisis de procesos es fundamental ya que permite visualizar los alcances de un problema en lo que respecta a la comprensión del mismo y el uso de los conocimientos, operaciones matemáticas, conexiones y representaciones.

Los aspectos analizados en este documento para cada problema son algunos de los que se pueden considerar, sin embargo se puede hacer un mayor análisis a cada problema, por ejemplo Ruiz (en prensa) estudia los procesos a través de indicadores para que esta asignación sea menos subjetiva también.

Referencias y bibliografía

- Espinoza, J. (2013). La resolución e invención de problemas en la educación matemática. En: B. Almeida (Ed.) *Memorias de XIV evento internacional Matecompu*, pp.1-16. Recuperado de http://www.academia.edu/10022785/La_resoluci%C3%B3n_e_Invenci%C3%B3n_de_Problemas_en_la_Educaci%C3%B3n_Matem%C3%A1tica
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (1995a). *Programa de estudios. Primer ciclo. Matemáticas*. Costa Rica: autor
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (1995b). *Programa de estudios. Segundo ciclo. Matemáticas*. Costa Rica: autor.
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (1995c). *Programa de estudios. Tercer ciclo. Matemáticas*. Costa Rica: autor.
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (1996). *Programa de estudios. Educación Diversificada. Matemáticas*. Costa Rica: autor.
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012). *Programas de Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado*. San José, Costa Rica: autor.
- OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas*. Madrid, INECSE.
- Ruiz, A.; Chavarría, J. y Mora, F. (2003). Tendencias y retos de la Educación Matemática en Costa Rica. *Revista Uniciencia*, 20(1).
- Ruiz, A. (2013). Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Perspectiva de la praxis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Número especial, 7-9. Recuperado de <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/11151/10603>
- Ruiz, A. (2015, abril). Balance y perspectivas de la Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 13, 15-33. Recuperado de <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/1866>
- Ruiz, A. (en prensa). Evaluación y pruebas nacionales para un currículo de matemáticas que enfatiza capacidades superiores. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 17.
- Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19- 28.
- Silver, E. y Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27. (5), 521-539