



II CEMACYC

II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

29 octubre al 1 noviembre. 2017

Cali, Colombia

ii.cemacyc.org



Razonamiento Configural Extendido: coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas geométricos empíricos

Extended Configural Reasoning: coordination of cognitive processes in the resolution of empirical geometric problems.

Antonio **Saorín**

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España

ansaovi@gmail.com

Germán **Torregrosa**

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España

german.torregrosa@ua.es

Humberto **Quesada**

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España

humberto.quesada@ua.es

Resumen

Esta comunicación presenta los resultados de un estudio que tiene como objetivo identificar características del modelo Razonamiento Configural Extendido (Torregrosa, 2017) cuando los estudiantes resuelven problemas empíricos en contexto geométrico que involucran interacciones entre los registros algebraico y geométrico. Los resultados ponen de manifiesto la influencia de la configuración inicial en el desenlace del razonamiento configural, además de la tendencia de los estudiantes a “desechar” la representación geométrica una vez que han establecido las relaciones necesarias en registro algebraico que permiten dar una solución al problema. Estos resultados ponen de manifiesto el potencial del modelo del Razonamiento Configural Extendido para analizar la resolución de este tipo de problemas.

Palabras clave: razonamiento configural, problemas empíricos, truncamiento, registro algebraico, geometría.

Abstract

The aim of this study is to identify the characteristics of the Extended Configural Reasoning model (Torregrosa, 2017) when students solve empirical problems in a geometrical context which involve interactions between the algebraical and the geometrical registers. The results bring to light the influence of the initial configuration in configural reasoning process, and the student's tendency to do not into account the geometrical representation once they have already established the necessary algebraical relations, which allow bringing out the solution of the problem. These findings underline the potential of Extended Configural Reasoning model to analyze the resolution of this kind of problems.

Keywords: configural reasoning, empiric problems, truncation, algebraical register, geometry.

Introducción

El estudio de los diferentes procesos involucrados en la resolución de problemas centrados en la demostración en contexto geométrico, adquiere especial relevancia en las agendas de investigación actuales. Duval (1998, 2016) pone de relieve la importancia de los procesos de visualización, considerándolos a partir de tres tipos de aprehensiones: Aprehensión Perceptiva (identificación simple de una configuración), Aprehensión Discursiva (asociación de configuración con afirmaciones matemáticas) y Aprehensión Operativa (modificación de la configuración inicial, con el objetivo de identificar subconfiguraciones relevantes en el proceso de demostración).

Torregrosa y Quesada (2007) y Torregrosa, Quesada y Penalva (2010), proponen un modelo que denominan "Razonamiento Configural" centrado en la coordinación de las Aprehensiones Operativa y Discursiva puestas de manifiesto en la resolución de problemas de demostración en geometría. Dicho modelo subraya la coordinación entre los procesos de visualización y cómo dicha coordinación genera un razonamiento que: bien permite la resolución de problemas geométricos en forma de proceso deductivo (truncamiento), o una solución basada en conjeturas (conjetura sin demostración), o que desemboque en una situación de bloqueo (bucle) que no proporciona la solución al problema. El análisis de la coordinación entre la Aprehensión Operativa y Discursiva durante el proceso de razonamiento puede permitirnos acceder a la identificación y comprensión de diferentes factores que desencadenan un razonamiento lógico-deductivo en el proceso de resolución y que permiten concluirlo con éxito. Hasta ahora, el modelo Razonamiento Configural se ha utilizado para analizar las respuestas de los estudiantes a problemas geométricos de prueba clásicos (problemas en los que se proporcionan información sobre una configuración (hipótesis) y se pide probar un hecho geométrico (la tesis)) (Torregrosa y Quesada, 2007; Torregrosa, Quesada y Penalva, 2010; Prior y Torregrosa, 2013; Llinares y Clemente, 2014; Clemente y Llinares, 2015). Sin embargo, al considerar problemas de tipo empírico (Figura 1), que describen hechos o situaciones en un contexto geométrico que contienen medidas, datos y/o variables, es necesario considerar dos factores: (1) La aparición del registro algebraico en el proceso de resolución del problema, y (2) la introducción de datos (dimensiones, variables, etc.) en las condiciones iniciales del problema, relacionados con conocimientos concretos y referidos a una configuración particular, frente a las

hipótesis ligadas a propiedades geométricas generales de los problemas de prueba clásicos.

En los problemas empíricos, además del registro geométrico ha de considerarse el registro algebraico, ya que aparece en el discurso generado durante su resolución. Por otro lado, la inclusión del registro algebraico dentro del modelo Razonamiento Configural Extendido (Torregrosa, 2017) se justifica con el concepto de conversión entre registros semióticos (Duval, 1999). Esto implica que además de teoremas, axiomas o propiedades generales, consideremos los datos o condiciones particulares (expresadas en registro algebraico) asociadas a la configuración geométrica como afirmaciones matemáticas.

El objetivo del presente trabajo es identificar características del modelo Razonamiento Configural Extendido (Torregrosa, 2017) cuando los estudiantes resuelven problemas geométricos empíricos en un entorno de lápiz y papel, evidenciando la potencia de dicho modelo para el análisis de las respuestas escritas de los estudiantes a problemas que involucran el registro algebraico en un contexto geométrico.

Método

Participantes

33 alumnos de 1º curso de Bachillerato (15-17 años), ninguno de los cuales había recibido instrucción específica acerca del proceso de demostración matemática en contexto geométrico, aunque sí han tenido un acercamiento a la resolución de problemas de tipo empírico.

Instrumento

Los estudiantes resolvieron dos problemas empíricos en los que se presentaba una configuración geométrica y unas condiciones iniciales en forma de datos numéricos.

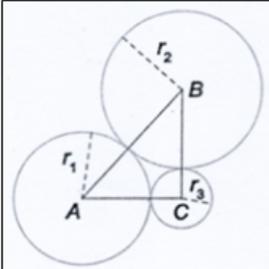
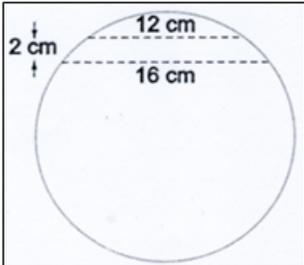
Problema 1 (P1)	Problema 2 (P2)
<p>Los catetos de un triángulo rectángulo miden 27 y 36 cm. Tomando como centro cada uno de los vértices del triángulo se trazan tres circunferencias de forma que son tangentes exteriores dos a dos. Calcula los radios de las tres circunferencias.</p> 	<p>Las dos cuerdas paralelas dibujadas en la circunferencia de la figura miden 12 y 16 cm. La distancia entre ellas es de 2 cm. Calcula el radio de la circunferencia.</p> 

Figura 1. Problemas empíricos del estudio.

Los problemas fueron seleccionados teniendo en cuenta que los participantes tuviesen los conocimientos geométricos necesarios para su resolución, y considerando la existencia de subconfiguraciones relevantes que puedan generar ideas que permitan guiar el proceso de resolución. En el primer problema las posibles subconfiguraciones relevantes forman parte de la configuración inicial, mientras que en el segundo problema las configuraciones han de ser

construidas por los estudiantes, hecho que requiere acciones cognitivas más complejas

Análisis

El análisis de las respuestas a las cuestiones se desarrolló en tres fases. En la primera, se transcribieron y segmentaron las respuestas para facilitar la identificación de los ciclos coordinados de Aprehensiones Operativa/Discursiva desarrollados durante la resolución (Torregrosa et al, 2010) (Figura 2). La segunda fase se centró en identificar características de las coordinaciones aprehensiones operativas/discursivas y del desenlace considerando las diferentes subconfiguraciones relevantes identificadas durante el proceso de resolución. Esta fase implica la identificación de las relaciones entre los procesos de visualización, esto es, el reconocimiento y asociación de información a las subconfiguraciones consideradas y viceversa. En la tercera fase, se identificaron los procesos de conversión entre registros, así como el tratamiento de la información obtenida durante el proceso de razonamiento conducente a la solución.

Resultados

Debido a que los análisis arrojan diferencias significativas en los desenlaces “truncamiento” y “conjetura sin demostración” del Razonamiento Configural dependiendo del problema a considerar, los resultados se presentan en dos apartados: Truncamiento en problemas empíricos, y conjetura sin demostrar en problemas empíricos.

Tabla 1

Porcentajes de aparición de los distintos desenlaces de resolución

	P1	P2
Truncamiento	42	3
Conjetura sin demostración	18	39

Fuente: el estudio realizado

Truncamiento en problemas empíricos

El truncamiento se da cuando el estudiante establece las relaciones que “resuelven” el problema, esto es, antes del tratamiento efectuado en registro algebraico, independientemente si éste se realiza de forma correcta o no (Figura 2). Este hecho, nos ha permitido identificar errores cometidos durante el tratamiento algebraico de las relaciones establecidas, aun cuando éstas eran las adecuadas para la resolución del problema. Por tanto, no todos los “truncamientos” han proporcionado la solución correcta.

Existe diferencia entre el porcentaje de “truncamientos”: un 42% para el problema 1 frente al 3% del problema 2. En el problema 1, todos los alumnos en los que su Razonamiento Configural desemboca en “truncamiento” identifican las mismas subconfiguraciones relevantes, a partir de las que establecen los ciclos coordinados de aprehensiones operativas/discursivas y las relaciones correctas y necesarias para la resolución del problema. En el problema 2, tres alumnos han construido las subconfiguraciones relevantes necesarias para su resolución, pero sólo uno “trunca” su Razonamiento Configural. Los otros dos estudiantes no han conseguido establecer las relaciones adecuadas o las han basado en conjeturas sin demostrarlas previamente. Estas

diferencias pueden deberse a las características intrínsecas de las configuraciones iniciales presentadas.

A continuación se desarrolla el proceso de análisis desde el marco teórico del Razonamiento Configural Extendido (en adelante RCE) para la solución dada al problema 1 (P1) por parte de la alumna 8 (AL8):

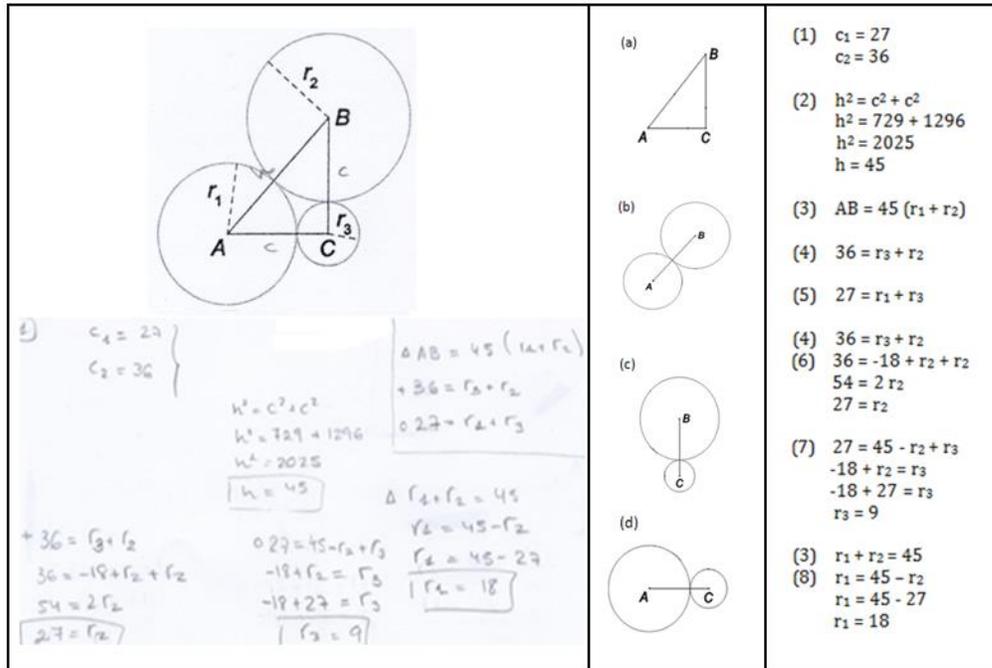


Figura 2. Respuesta de AL8 al P1, subconfiguraciones relevantes identificadas y unidades de análisis.

- (1) Considera la subconfiguración formada por el $\triangle ABC$ (a), realizando una Aprehensión Operativa (en adelante AO), identificando los catetos y asociando los valores proporcionados por el enunciado con los mismos, realizando una Aprehensión Discursiva (en adelante AD).
- (2) Considera la subconfiguración formada por $\triangle ABC$ (a) (AO), asociándola con el teorema de Pitágoras (AD) en **registro algebraico**, lo que le permite relacionar las longitudes de los catetos con el lado desconocido (\overline{AB} , hipotenusa), realizando un **tratamiento** para obtener que su longitud es de 45 cm.
- (3) Considera la subconfiguración (b) formada por las circunferencias con centros en A y B, junto con \overline{AB} que los une (AO). Asocia la longitud del segmento \overline{AB} (45 cm) con la suma de los radios de las circunferencias con centros en A y B, r_1 y r_2 respectivamente (AD), realizando una **conversión** del registro geométrico al algebraico que le permite expresar la relación establecida en **registro algebraico** ($r_1 + r_2 = 45$).
- (4) Considera la subconfiguración (c) formada por las circunferencias con centros en B y en C, junto con el \overline{BC} que los une (AO). Asocia la longitud del \overline{BC} (36 cm) con la suma de los radios de las circunferencias con centros en B y C, r_2 y r_3 , respectivamente (AD), realizando una **conversión** del registro geométrico al algebraico que le permite expresar la relación establecida en **registro algebraico** ($r_2 + r_3 = 36$).
- (5) Considera la subconfiguración (d) formada por las circunferencias con centros en A y C, junto con el segmento \overline{AC} , que los une (AO). Asocia la longitud del \overline{AC} (27 cm) con la

suma de los radios de las circunferencias con centros en A y C, r_1 y r_3 , respectivamente (AD), realizando una **conversión** del registro geométrico al algebraico para expresar algebraicamente la relación establecida ($r_1+r_3=27$).

- (6), (7) y (8) Considera las expresiones algebraicas obtenidas en (3), (4) y (5) formando un sistema de ecuaciones, realizando un **tratamiento** (doble sustitución) en **registro algebraico** que le permite obtener en primer lugar el valor de r_2 , para posteriormente sustituir en las otras expresiones y resolver el problema.

A partir del análisis realizado desde el RCE, concluimos que el razonamiento desarrollado por la alumna ha desembocado en “**truncamiento**”, que se evidencia en el punto (5), ya que la coordinación entre los ciclos de AO/AD y la conversión entre los registros geométrico y algebraico ha proporcionado la solución al problema.

Por otro lado, del análisis de los “truncamientos” se desprende que una vez los alumnos han establecido las relaciones necesarias y suficientes para la resolución del problema en registro algebraico y comienzan con el proceso de tratamiento en dicho registro, no vuelven a considerar el registro visual, ni siquiera para comprobar que los resultados son, al menos, coherentes con los datos y la configuración inicial, dando por válidas las soluciones independientemente de su valor.

Conjetura sin demostración en problemas empíricos

Los resultados muestran una diferencia en la incidencia de este desenlace en los dos problemas: un 18% para el problema 1 frente a un 39% para el problema 2. Nosotros conjeturamos que esta diferencia, puede deberse a las características propias de cada configuración que construyen los estudiantes. A continuación ejemplificamos esta situación mediante la respuesta al problema 2 por parte del alumno14 (AL14) (Figura 3).

- (1) Modifica la configuración inicial construyendo dos triángulos rectángulos (a) y (b), considerando el que presenta un cateto sobre la cuerda de 16 cm (b) (AO) y asocia los lados de dicho triángulo con los valores “4”, “r” y “r-4” **en registro algebraico**, donde “r” es el radio de la circunferencia (AD).
- (2) Considera el triángulo mostrado en (b) (AO) para asociarle el teorema de Pitágoras en **registro algebraico** (AD), realizando un **tratamiento** sobre la expresión resultante que le permite obtener que el radio mide 4 cm, resolviendo así el problema planteado.

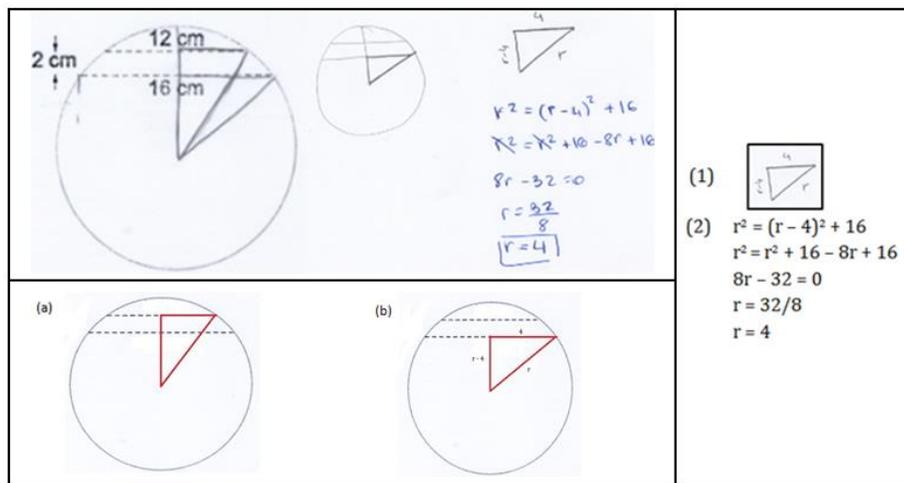


Figura 3. Respuesta de AL14 al P2, subconfiguraciones relevantes identificadas.

En este caso, el razonamiento configural desemboca en “conjetura sin demostración”, ya que se basa en dos inferencias no demostradas: (a) considera que la distancia entre el borde superior de la circunferencia y la cuerda de 12cm es de 2cm, valor que infiere erróneamente a partir de la separación entre las cuerdas (dato), lo que le permite afirmar que el valor de un cateto del triángulo considerado es igual a la longitud del radio menos 4cm, y (b) asocia el valor del otro cateto con 4 cm, en lugar de 8 cm (mitad de la cuerda de 16 cm).

Estas inferencias llevan a AL14 a considerar uno de los triángulos construidos sobre la configuración inicial y no los dos, aunque para la resolución correcta del problema son necesarios ambos. Una vez asociado el triángulo considerado con el teorema de Pitágoras realiza una conversión al registro algebraico, estableciendo una relación basada en conjeturas no demostradas (valores de los catetos), que le permite encontrar una solución al problema tras un tratamiento en registro algebraico.

En los análisis realizados para el desenlace “conjetura sin demostración”, observamos que los estudiantes se basan en conjeturas sobre las subconfiguraciones relevantes identificadas, aceptadas como válidas sin demostrar previamente, para dar una solución al problema.

Discusión y Conclusiones

El objetivo de este trabajo es realizar una primera aproximación al análisis de problemas empíricos en contexto geométrico en entorno de lápiz y papel desde la perspectiva del modelo Razonamiento Configural Extendido (Torregrosa, 2017), con el fin de hacer patente su potencial para realizar el análisis de este tipo de ejercicios. De los resultados obtenidos se desprende la influencia de las características de las configuraciones iniciales que acompañan al problema en el desenlace del razonamiento configural. En el primer problema las subconfiguraciones relevantes que debían identificar los alumnos para la resolución del problema formaban parte de la configuración inicial, mientras que en el segundo, las subconfiguraciones relevantes debían ser construidas, proceso cognitivamente más complejo que la simple identificación. Esta diferencia en las características de las configuraciones iniciales permitió que la mayoría de los razonamientos desembocasen en “truncamiento” en el primer problema y que en todos los “truncamientos” fuesen consideradas las mismas subconfiguraciones relevantes, frente a un predominio de la “conjetura sin demostración” en el segundo, al fundamentar sus procesos de razonamiento en inferencias o conjeturas no demostradas desprendidas de la configuración inicial, ya que no identificaron las subconfiguraciones relevantes necesarias para la resolución del problema. Por tanto, se pone de manifiesto la influencia de las características de las configuraciones geométricas iniciales en la identificación de subconfiguraciones relevantes y por tanto en el proceso de razonamiento desarrollado (Mesquita 1998; Clemente y Llinares, 2013; Llinares y Clemente, 2014; Clemente, Torregrosa y Llinares, 2015; Clemente, Llinares y Torregrosa, 2017) para resolver problemas geométricos empíricos, lo que explica los distintos desenlaces del razonamiento configural predominantes en los problemas analizados.

Este hecho nos hace preguntarnos cuestiones como: ¿por qué unos estudiantes son capaces de realizar la conversión total del registro geométrico al algebraico y otros necesitan el apoyo del primero para finalizar su razonamiento? o ¿por qué una vez “modelada” la situación geométrica en registro algebraico se descarta el registro geométrico, aun cuando puede ser necesario, por ejemplo para comprobar la validez y coherencia de los resultados obtenidos en el contexto geométrico inicial? Por tanto, son necesarias investigaciones que puedan dar respuesta a estas y

otras cuestiones abiertas relacionadas con problemas de tipología empírica en contexto geométrico y con los procesos cognitivos involucrados en su resolución, tarea para la que el modelo Razonamiento Configural Extendido se presenta como una potente herramienta.

Referencias

- Clemente, F., y Llinares, S. (2013). Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en Educación Primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación matemática XVII* (pp. 229- 236). Bilbao: SEIEM.
- Clemente, F.; y Llinares, S. (2015). Formas de discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestro en la resolución de problemas de geometría. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(1), 9-27.
- Clemente, F., Torregrosa, G. y Llinares, S. (2015). La identificación de figuras prototípicas en el desarrollo del razonamiento configural. XIV CIAEM-IACME. Chiapas, México, 2015.
- Clemente, F., Llinares, S.; y Torregrosa, G. (2017). Visualización y Razonamiento Configural. *BOLEMA. Boletim de Educação Matemática*, v.31, n°
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, 37-51. Dordrecht/ Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Artes gráficas Univalle
- Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En L. Radford y B. D'Amore (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp 13-61). Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2016.
- Llinares, S., y Clemente, F. (2014). Characteristics of pre-service primary school teachers' configural reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(3), 234-250.
- Mesquita, A.L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 183-195.
- Prior, J., y Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(3), 339-368.
- Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *RELIME. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 275-300.
- Torregrosa, G., Quesada, H., y Penalva M.C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 327-340.
- Torregrosa, G. (en prensa). Coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas: relación entre geometría y álgebra. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, n° 12.