II CEMACYC
II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
29 octubre al 1 noviembre. 2017
Cali, Colombia
REDUMATE ii.cemacyc.org

Características del conocimiento sobre la fracción, razón y proporción de estudiantes para maestro

Àngela **Buforn**
Universidad de Alicante, España
angela.buforn@ua.es

Ceneida **Fernández**
Universidad de Alicante, España
ceneida.fernandez@ua.es

Salvador **Llinares**
Universidad de Alicante, España
sllinares@ua.es

Resumen

Este estudio examina las características del conocimiento de estudiantes para maestro de la fracción, razón y proporción. Consideramos tres ámbitos: diferentes sub-constructos del esquema fraccionario, la discriminación de situaciones proporcionales, y la comparación de razones. 91 estudiantes para maestro resolvieron un cuestionario formado por 12 problemas vinculados a estos ámbitos: 6 problemas sobre el esquema fraccionario, 2 problemas sobre discriminación entre situaciones proporcionales y no proporcionales, y 4 problemas de comparación de razones. Los resultados indican que los estudiantes para maestro tienen éxito en los problemas en los que pueden usar procedimientos algorítmicos, pero tienen dificultades en los problemas que requieren comprender las relaciones entre las cantidades.

Palabras clave: razonamiento proporcional, fracciones, estudiantes para maestro de primaria, conocimiento de matemáticas, formación de maestros.

Introducción y marco teórico

En los último años se han desarrollado diferentes líneas de investigación para caracterizar el conocimiento de matemáticas que deben tener los maestros para desarrollar su labor docente (Ball, Thames y Phelps, 2008). La hipótesis que apoya este tipo de investigación es que el conocimiento de matemáticas es clave en el desarrollo de competencias docentes relativas a la organización del contenido matemático para enseñar y a la interpretación de la manera en la que los estudiantes de primaria aprenden las matemáticas (Fernández, Llinares, Valls, 2013; Rivas, Godino y Castro, 2012). Un dominio matemático importante en el currículo de educación primaria incluye los conceptos de fracción, razón y proporción (Lamon, 2005). Las investigaciones previas indican que la enseñanza de estos conceptos no es una tarea fácil para los maestros y han empezado a mostrar algunas características del conocimiento que es necesario para su enseñanza (Livy y Vale, 2011; Pitta-Pantazi y Christou, 2011). Algunas de las características identificadas están vinculadas a la comprensión de la idea de unidad y la constitución de unidades múltiples (Buforn y Fernández, 2014; Lee, Brown y Orril, 2011), a la interpretación de la comparación de razones (Gómez y García, 2014; Livy y Vale, 2011), y al reconocimiento de situaciones proporcionales (Buforn y Fernández, 2014; Valverde y Castro). Estos estudios previos muestran rasgos específicos del conocimiento de los estudiantes para maestro pero es necesario examinar características globales considerando varios de estos aspectos simultáneamente como una manera de describir dominios de conocimiento de matemáticas más amplios.

La investigación que presentamos aquí tiene como objetivo describir características del conocimiento sobre la fracción, razón y proporción en estudiantes para maestro como fundamento para la realización de tareas profesionales vinculadas a la enseñanza de las matemáticas en educación primaria.

Razonamiento proporcional: Conceptos de fracción, razón y proporción

Lamon (2005, 2007) señala que el razonamiento proporcional es multifacético e integra diferentes sub-constructos. En nuestro estudio consideramos los 12 sub-constructos del razonamiento proporcional propuestos por Lamon (2005) y Pitta-Pantazi y Christou (2011) organizados en tres dominios: esquema fraccionario, comparación de razones, y discriminación entre situaciones proporcionales y no proporcionales.

En relación al esquema fraccionario consideramos seis sub-constructos: el sub-constructo *parte-todo* se define como la relación entre el número de partes congruentes en las que se divide una cantidad continua o un conjunto de objetos discretos y el todo. La fracción como número asignado a una medida permite considerar la *recta numérica* como una representación adecuada y permite introducir la idea de *densidad* de los números racionales. El sub-constructo *cociente* se vincula al proceso y resultado de un reparto equitativo. El *operador* es visto como una función aplicada a un número, objeto o conjunto. Y el *razonamiento up and down* implica coordinar la idea de la fracción como una unidad múltiple (a/b = a veces 1/b) con la idea de fracción unitaria (1/n) como una unidad iterativa y se manifiesta en las actividades de representar fracciones a partir de otra fracción.

En relación a la comparación de razones (cualitativa y cuantitativa) consideramos las ideas de *covarianza* (relación entre dos cantidades de manera que, cuando una cantidad cambia, la otra también cambia de una manera particular con respecto a la primera); la *razón* como un índice comparativo; y el *proceso unitizing* que implica la construcción de una unidad de referencia y su uso para comparar situaciones. Finalmente, consideramos la habilidad de discriminar entre situaciones proporcionales y no proporcionales (Van Dooren, De Bock, Janssens, & Verschaffel, 2008) como un dominio del conocimiento sobre las razones y el razonamiento proporcional. Teniendo en cuenta esta manera de caracterizar los diferentes aspectos que consideramos de las fracciones, razón y proporción, en el contexto de identificar características del conocimiento del maestro para la enseñanza de las matemáticas, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

- ¿Cómo los estudiantes para maestro conocen la fracción, razón y proporción como fundamentos del razonamiento proporcional para la enseñanza de las matemáticas en la educación primaria?

Método

Participantes e instrumento

Los participantes fueron 91 estudiantes para maestro (EPM) de Educación Primaria matriculados en el tercer curso de un programa de formación inicial de maestros de la Universidad de Alicante (España). En los años previos los estudiantes para maestro habían cursado una asignatura sobre el sentido numérico y otra sobre el sentido geométrico centrados en desarrollar la comprensión de los contenidos matemáticos necesarios para enseñar matemáticas en la educación primaria. En el momento de la recogida de datos cursaban una asignatura sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. Los datos fueron recogidos antes de estudiar los módulos sobre la enseñanza y aprendizaje de la fracción, razón y proporción con el objetivo de determinar las referencias relativas al conocimiento de matemáticas con las que los estudiantes para maestro se aproximaban al aprendizaje del contenido relativo a la enseñanza y aprendizaje.

Los datos se recogieron mediante un cuestionario formado por 12 problemas organizados en tres bloques (Tabla 1) teniendo en cuenta cada uno de los dominios de contenido matemático considerados: seis problemas sobre el esquema fraccionario (bloque A), dos problemas sobre discriminación entre situaciones proporcionales y no proporcionales (bloque B), y cuatro problemas de comparación de razones (bloque C) que seguía la estructura conceptual descrita anteriormente. Los problemas utilizados en este cuestionario procedían de investigaciones previas (Buforn y Fernández; 2014; Lamon, 2007; Pitta-Pantazi y Christou, 2011) o fueron modificados o diseñados ad hoc.

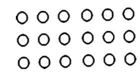
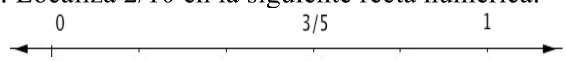
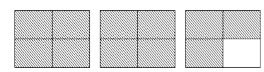
Análisis de los datos

El análisis de datos se centró en dos aspectos. Inicialmente determinamos el nivel de éxito codificando las respuestas según el siguiente criterio: (i) si se había resuelto y justificado correctamente el problema, se codificaba con un 1, independientemente de si habían cometido un error de cálculo, y (ii) si se había resuelto de forma incorrecta el problema o estaba en blanco, se codificaba con un 0. También se codificaron con un 0 las respuestas que siendo correctas la justificación era incorrecta. Tras la codificación, se obtuvieron los porcentajes de éxito para cada uno de los problemas. En segundo lugar, se caracterizaron las resoluciones considerando si usaban un procedimiento estandarizado o generaban resoluciones teniendo en cuenta de manera explícita las relaciones entre las cantidades.

Resultados

La Tabla 2 muestra el porcentaje de éxito de cada problema en cada uno de los dominios matemáticos considerados: esquema fraccionario, discriminación de situaciones proporcionales y comparación de razones. Siete de los problemas considerados tuvieron un nivel de éxito menor del 33%, mientras que los otros cinco problemas tuvieron un nivel de éxito mayor del 66%. Un primer hecho relevante que muestra esta distribución es que los problemas considerados en los diferentes dominios se distribuyeron entre estos dos grupos indicando que no existe relación de inclusión entre el conocimiento de los ítems sobre el esquema fraccionario, la discriminación de situaciones proporcionales y no proporcionales y la comparación de razones, según han sido caracterizados en esta investigación.

Tabla 1.Cuestionario

	Problemas
Bloque A: esquema fraccionario (6 problemas)	*1. Parte-todo*: ¿Cuántos puntos son 2/3 del conjunto dado?  *2. Medida-recta numérica*: Localiza 2/10 en la siguiente recta numérica. Justifica tu respuesta.  *3. Medida-densidad*: Encuentra dos fracciones que estén entre 1/6 y 1/5. *4. Reparto equitativo-Cociente*: Cuatro personas van a compartir 3 pizzas idénticas. ¿Cuánto le tocará a cada persona si todos comerán la misma cantidad de pizza? Haz un dibujo que muestre lo que le toca a cada persona. *5. Razonamiento "up and down"*: La parte sombreada de esta figura representa 3+2/3. ¿Qué parte de la figura representa 4 rectángulos pequeños?  *6. Operador*: El profesor le dijo a Nicolás que hiciese unas fotocopias. Nicolás cometió un error y apretó el botón que reduce el tamaño de cada copia a ¾. ¿Cuánto debe aumentar Nicolás el tamaño de las copias reducidas para conseguir el tamaño original?
Bloque B: discriminación de situaciones proporcionales (2 problemas)	*7. Problema valor perdido proporcional*: La máquina R y J producen tornillos en una fábrica. Empezaron al mismo tiempo pero la máquina J es más rápida. Cuando la máquina R ha producido 40 tornillos, la máquina J ha producido 120 tornillos. Si la máquina R ha fabricado 200 tornillos, ¿cuántos tornillos habrá fabricado la máquina J? *8. Problema valor perdido no proporcional*: Las empresas A y B fabrican tornillos a la misma velocidad pero la empresa B ha empezado antes. Cuando la empresa A ha fabricado 40 cajas, la empresa B ha fabricado 120 cajas. Si la empresa A ha fabricado 120 cajas ¿cuántas cajas tendrá fabricadas la empresa B?
Bloque C: comparación de razones (4 problemas)	*9. Pensamiento relativo-absoluto*: José tiene dos serpientes, Judía Verde y Esbelta. Ahora mismo, Judía Verde mide 40cm de longitud y Esbelta 50cm de longitud. Juan sabe que dentro de dos años, ambas serpientes habrán crecido completamente. La longitud de Judía Verde será de 70cm, mientras que la de Esbelta será de 80cm. Dentro de dos años, ¿habrán crecido ambas la misma cantidad? *10. Proceso "unitizing"*: La caja de cereales A cuesta 3.36€ y la caja con 12kg de cereales B cuesta 2.64€. ¿Qué caja es más barata? *11. Razón*: En un nuevo edificio se venden lofts rectangulares de tres tamaños diferentes: a) 7.5 metros por 11.4 metros, b) 4.55 metros por 5.08 metros, y c) 18.5 metros por 24.5 metros. ¿Cuál de ellos parece que es más cuadrado? *12. Covarianza*: Responde a los siguientes apartados: a) Ana condujo hoy menos kilómetros en más tiempo que ayer. ¿Cuándo fue su velocidad menor? b) Pepe dio hoy más vueltas en más tiempo que ayer. ¿Cuándo fue su velocidad mayor?

Los siete sub-constructos con menor nivel de éxito fueron: el significado de operador inverso (5%), razón como índice comparativo (9%), pensamiento relacional (12%), razonamiento up and down (20%), medida-densidad (26%), problema de valor perdido no proporcional (30%) y covarianza-cualitativo (32%). Por otra parte, los cinco sub-constructos con un nivel de éxito por encima del 66% fueron: el proceso unitizing (71%), situaciones proporcionales de valor perdido (84%), medida-recta numérica (91%), repartos equitativos-cociente (96%), y parte-todo (98%).

Tabla 2. Porcentaje de estudiantes para maestro que resolvieron con éxito los problemas (N=91)

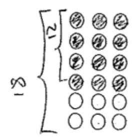
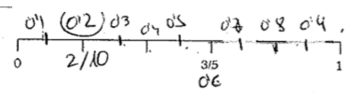
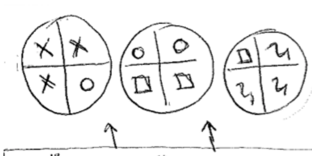
BLOQUE	Problema	Sub-constructo	Número de EPM	Porcentaje de éxito (*)
A	6	Operador inverso	5	5%
C	11	Razón como índice comparativo	8	9%
C	9	Pensamiento relativo-absoluto	11	12%
A	5	Razonamiento up and down	18	20%
A	3	Medida-densidad	24	26%
B	8	Problema valor perdido no proporcional	27	30%
C	12	Covarianza-cualitativo	29	32%
C	10	Proceso unitizing	65	71%
B	7	Problema valor perdido proporcional	76	84%
A	2	Medida-recta numérica	83	91%
A	4	Cociente	87	96%
A	1	Parte-todo	89	98%

(*) los porcentajes han sido redondeados a la unidad más próxima

Los estudiantes para maestro tuvieron un éxito mayor en los problemas vinculados al significado parte-todo (parte-todo y medida-recta numérica) y en los problemas que pudieron resolver a través de procedimientos como el algoritmo de la división o la regla de tres (cociente-reparto equitativo, problema de valor perdido proporcional y proceso unitizing). Sin embargo, cuando la resolución de los problemas implicaba tener en cuenta las cantidades y las relaciones entre las cantidades, los estudiantes para maestro tuvieron mayores dificultades. En particular, en los sub-constructos relativos a la discriminación de situaciones no proporcionales, en la comparación e interpretación de razones, la covarianza cualitativa y con el operador inverso. En relación al esquema fraccionario, las dificultades se centran en la reconstrucción de la unidad (operador inverso y razonamiento up and down). En los problemas de valor perdido, el problema proporcional tuvo un 84% de éxito pero el problema no proporcional solamente un 30% lo que indica que los estudiantes para maestro no discriminan entre estas dos situaciones. Además, los estudiantes para maestro también mostraron dificultades para reconocer las comparaciones relativas y absolutas, en problemas cualitativos al no existir un procedimiento algorítmico para obtener la solución, y en el uso de la razón como índice comparativo (aproximación a 1 por ser la razón entre los lados de un cuadrado 1).

Para ejemplificar esta característica del conocimiento de los estudiantes para maestro de la fracción, razón y proporción (nivel de éxito bajo en situaciones que hay que identificar las relaciones entre las cantidades, pero nivel de éxito alto donde se pueden aplicar procedimientos de cálculo), mostramos las respuestas de un estudiante para maestro que refleja esta característica (Tabla 3; resolvió correctamente los problemas que se podían resolver mediante procedimientos pero resolvió incorrectamente los problemas en los que tenía que reconocer relaciones entre cantidades). Este estudiante para maestro resuelve correctamente el problema *parte-todo* mediante el procedimiento de cálculo de fracciones equivalentes y los problemas *medida-recta numérica*, *cociente* y *proceso unitizing* mediante divisiones. Así, en la *recta numérica* divide el segmento en 0.2, 0.4, .6,…; en el problema *cociente-reparto equitativo* realiza la división 12 entre 4 personas (12:4=3) y en el problema *unitizing* divide los kilos entre los euros. Sin embargo, cuando los problemas exigen la comprensión de relaciones entre cantidades donde no hay un procedimiento previamente establecido tiene dificultades. Así, en el problema de valor perdido proporcional usa la regla de tres, pero también usa este mismo procedimiento (regla de tres) incorrectamente en el problema de valor perdido no proporcional, usa de manera sistemática la división en el problema de *medida-densidad* y *operador* sin saber resolver el problema, y emplea una estrategia aditiva incorrecta en los problemas de comparar razones (problemas *pensamiento relacional* y *razón como índice comparativo*).

Tabla 3. Ejemplo de las respuestas del estudiante para maestro E040

Sub-constructo	Respuesta del EPM
1. Parte-todo	 $\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$ ·6 → buscamos una fracción equivalente que se acerque más a los números que se representan en el dibujo. $\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$
2. Medida-recta numérica	 Sabemos que 3/5 es 0'6, por lo que además sabemos que dicho pto. ~~Situado entre 3/5 y 0 será la mitad de 0'6, es decir, 0'3. De 0'3 a 1 debe haber 2 ptos más: 0'2 y 0'1.~~ → Sabemos que entre 0'6 y 0 tiene que haber 5 punto, por lo que dividimos en 2 los ptos ya dibujados.
3. Medida-densidad	1/6 = 0'1$\hat{6}$ → la cantidad que buscamos tiene que estar entre 0'1$\hat{6}$ y 0'2. 1/5 = 0'2 (→ No se solucionarlo)
4. Cociente-reparto equitativo	 Partimos la Pizza en 4 porciones, por lo que tendremos 12 porciones. Cada persona comerá $\boxed{\text{3 porciones}}$ de pizza. (12:4 = 3) x = 1ª persona O = 2ª persona □ = 3ª persona 4 = 4ª persona
5. Operador	$\frac{3}{4} = 0'6$, $\frac{9}{6} = 1'4$ > 1. Debe aumentar $\frac{9}{6}$ ~~...~~ el tamaño para que las copias sean normales. ~~A $\frac{3}{4}$ le falta $\frac{9}{6}$ para~~ . A $\frac{3}{4}$ (0'6) le faltan $\frac{9}{6}$ (1'4) para llegar a 1 unidad entera
6. Razonamiento up and down	No se hacerlo. No recuerdo el concepto de $3\frac{2}{3}$.

7. Problema valor perdido proporcional	J — R 120 — 40 X — 200 → $\frac{120 \cdot 200}{40} = \frac{24000}{40} = \boxed{600}$ ~~hab~~ tornillos habría fabricado la máquina J.
8. Problema valor perdido no proporcional	(20 cajas de diferencia) Si B es 80 → A es 40 Si B es X → A es 120 $\frac{120 \cdot 80}{40} = \boxed{240 \text{ cajas}}$ → Además sabemos que es el doble de cajas → 40 — 80 120 — 240
9. Pensamiento relativo-absoluto	(J) 70 - 40 = 30 cm (E) 80 - 50 = 30 cm → Ambas serpientes habrán crecido 30 cm, ~~aunque~~ por lo que sí habrán crecido la misma cantidad, aunque una seguirá siendo más larga que la otra.
10. Proceso unitizing	16 | 3'36 → 0'21 12 | 2'64 → 0'22 → la caja de $\boxed{16 \text{ kg}}$ es más barata porque el kg te sale 1 cent más barato.
11. Razón como índice comparativo	11,4 − 7,5 = 3,9 5,08 − 4,55 = 0,53 24,5 − 18,5 = 06,0 El edificio $\boxed{b}$ es el más cuadrado, ya que la diferencia de sus lados es la menor, y sabemos que en un cuadrado todos los lados tienen la misma medida.
12. Covarianza-cualitativo	a) Ayer su velocidad fue mayor, porque en menos tiempo recorrió más kilómetros. Además el propio enunciado nos dice "en más tiempo que ayer". B) Su velocidad fue mayor hoy, ya que el enunciado nos dice "en más tiempo que ayer". Las vueltas que dio no son importantes en esta pregunta, sólo cuestiona el tiempo.

Discusión

El objetivo de este estudio es identificar características de cómo los estudiantes para maestro conocen la fracción, razón y proporción como contenidos del conocimiento de matemáticas para enseñar. Los resultados indican que los estudiantes para maestro tuvieron éxito en los problemas en los que podían aplicar un procedimiento previamente aprendido, pero tuvieron mayores dificultades en los problemas que requerían reconocer la relación entre las cantidades y no se tenía un procedimiento. Esta característica fue transversal en los tres dominios considerados (esquema fraccionario, discriminación de situaciones proporcionales y no proporcionales, y comparación de razones), lo que indica que la característica procedimental-conceptual determina el conocimiento de matemáticas para enseñar por encima de los dominios matemáticos considerados. Así, los estudiantes para maestro resolvieron con éxito los problemas vinculados a la idea parte-todo, medida-recta numérica y cociente, la situación proporcional de valor perdido y el problema vinculado al proceso unitizing. Pero tuvieron dificultades con los problemas que requerían reconstruir la unidad (operador inverso y razonamiento up and down), reconocer una situación no proporcional y las situaciones de comparación cuantitativa y cualitativa.

Este resultado sugiere que los estudiantes para maestro tienen una comprensión procedimental del conocimiento matemático de la educación primaria independientemente del dominio particular considerado (fracción, razón o proporción). Esta situación define objetivos para los formadores de maestros en el sentido de intentar potenciar la comprensión conceptual de las matemáticas escolares en los estudiantes para maestro.

Reconocimientos. Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto EDU2014-54526-R del Ministerio de Economía y Competitividad, España; y del proyecto para grupos de investigación emergentes GV/2015/115 de la Conselleria de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Buforn, A. & Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de Primaria en relación al razonamiento proporcional. *BOLEMA, 28*(48), 21-41.

Fernández, C.; Llinares, S., & Valls, J. (2013). Primary school teacher’s noticing of students’ mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast, 10(*1&2), 441-468.

Gómez, B. y García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 375-384). Salamanca: SEIEM.

Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S.J. (2007). Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework. In F.K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-668). NCTM-Information Age Publishing, Charlotte, NC.

Lee, S. J., Brown, R. E., & Orrill, C. H. (2011). Mathematics teachers' reasoning about fractions and decimals using drawn representations. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(3), 198-220.

Livy, S. y Vale, C. (2011). “First year pre-service teachers’ mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question”. *Mathematics Teacher Education and Development,* vol. 1, núm. 2, pp. 22-43.

Pitta-Pantazi, D. & Christou, C. (2011). The structure of prospective kindergarten teachers’ proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(2), 149–169.

Rivas, M.A., Godino, J.D. y Castro, W.F. (2012). “Desarrollo del conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros profesores de Primaria”. *BOLEMA,* vol. 26, núm. 42B, pp. 559-588.

Valverde, A. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González, J. Murillo (Eds.), *Actas del XIII Simposio de la SEIEM. Investigación en Educación Matemática* (pp. 523-532). Santander: SEIEM y Universidad de Cantabria.

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students’ overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(3), 311-342.