



II CEMACYC

II Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

29 octubre al 1 noviembre. 2017

Cali, Colombia

ii.cemacyc.org



Desarrollo de la comprensión del triángulo en educación primaria

Melania **Bernabeu** Martínez

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante

España

melaniabernabeumartinez@gmail.com

Salvador **Llinares**

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante

España

sllinares@ua.es

Mar **Moreno**

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante

España

mmoreno@ua.es

Resumen

El desarrollo de la comprensión de las figuras geométricas en educación primaria (6-12 años), se constituye como el paso previo a la realización de las primeras clasificaciones. La adquisición del concepto figura geométrica se caracteriza por la transición desde una perspectiva perceptual a una conceptual apoyada en la coordinación de las aprehensiones perceptual, discursiva y operativa (Duval, 1999). Este desarrollo puede caracterizarse al establecer relaciones significativas entre las imágenes perceptuales de las representaciones gráficas prototípicas y la definición de la figura geométrica como conjunto mínimo de atributos. Tras identificar factores que incidían en este proceso en niños/as de 6 a 12 años para el caso del concepto de triángulo, observamos las dificultades que generan las figuras prototípicas para la identificación de atributos del triángulo

Palabras clave: Pensamiento geométrico, Comprensión de figuras geométricas, Triángulo, Perspectiva perceptual, Perspectiva conceptual.

Introducción

La comprensión de las figuras geométricas está vinculada a procesos de categorización que mejoran cuando el nombre de una figura se asocia a varios ejemplos y se establecen vínculos entre las unidades lingüísticas, conceptuales y perceptuales (Fulkerson & Waxman, 2007; Waxman & Braun, 2005). En este trabajo usamos el término figura para indicar una representación icónica de los conceptos y procesos geométricos (Mesquita, 1998). De esta manera, los conceptos geométricos se pueden representar mediante figuras entendidas como un registro para representar una determinada información (Figura 1), a través del lenguaje natural cuando hablamos, y mediante el lenguaje escrito (escribiendo la palabra *triángulo* para el concepto triángulo).

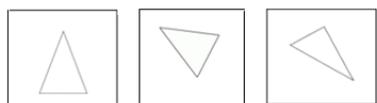


Figura 1. Diferentes representaciones icónicas (figuras) del concepto de triángulo.

En el desarrollo de la comprensión de las figuras geométricas, los referentes iniciales de los niños para los nombres de las figuras (e.g. *triángulo*, *cuadrado*, *rombo*, *paralelogramo*, ...) se vinculan a figuras prototípicas como por ejemplo el dibujo del triángulo equilátero con la base horizontal al filo de la hoja de papel. La imagen prototípica para un objeto geométrico creada por los niños/as suele formarse a partir de los sucesivos encuentros con una representación gráfica estereotipada como la representación de la izquierda en la Figura 1 para el concepto de triángulo (Scaglia y Moriena, 2005). Estas representaciones prototípicas hacen que atributos irrelevantes de las figuras, como la posición, generen características visuales que distorsionen la comprensión del concepto geométrico.

En esta fase inicial del desarrollo de la comprensión, la vinculación de la figura/dibujo al nombre no se apoya en las propiedades/atributos que definen las figuras (e.g. que un cuadrado es un cuadrilátero con los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos iguales) sino en la forma perceptual. Desde esta vinculación inicial de los nombres a figuras prototípicas, la ampliación de la comprensión de las figuras geométricas se da cuando los niños/as amplían el uso de los nombres a ejemplos no típicos e identifican contraejemplos de las figuras (Tsamir, Tirosh, y Levenson, 2008). Este proceso se apoya en actividades de comparar figuras como un medio de identificar atributos relevantes que permite a los niños/as ampliar el dominio semántico de los nombres de las figuras más allá de lo perceptualmente observado.

Un paso importante en el desarrollo de la comprensión de las figuras geométricas se da cuando estas se empiezan a concebir como parte de una clase de figuras. Este proceso se apoya en la capacidad de los niños/as de relacionar atributos de las diferentes figuras, lo que permite relacionar la definición del concepto con el proceso de clasificar. Resultados de investigaciones previas indican que la comprensión de las relaciones de inclusión que determinan las clasificaciones entre las figuras geométricas resulta difícil de conseguir, aunque se conozcan las definiciones de los objetos geométricos, y que las figuras prototípicas provocan dificultades en la comprensión de dichas relaciones de inclusión (Fujita, 2011).

Así, estas investigaciones previas han identificado diferentes niveles en la progresión de la comprensión de las figuras geométricas, que van desde la asociación de los nombres (palabras/términos) a figuras prototípicas, al reconocimiento de contraejemplos y la ampliación de dichos nombres a ejemplos no prototípicos y, finalmente, cuando los niños empiezan a relacionar atributos de las figuras para generar relaciones inclusivas. En el caso particular del concepto de triángulo algunas investigaciones han aportado información específica sobre el desarrollo de su comprensión indicando que, aunque los niños/as identifican figuras de triángulos prototípicos, tienen dificultades en reconocer otras representaciones (con diferentes tamaños, orientación o tipos) y en realizar clasificaciones apoyándose en la definición, y no solo, en las representaciones prototípicas (Yesil-Dagh & Halat, 2016). Sin embargo, no hay suficientes resultados que expliquen los factores que influyen en esta progresión y en las transiciones entre los niveles de comprensión del concepto. El objetivo de esta investigación es identificar factores que inciden en la progresión de la comprensión del concepto de triángulo en niños/as de 6 a 12 años.

Marco teórico

Las referencias teóricas usadas en esta investigación integran la idea de concepto figural (Fischbein, 1993) y las ideas de aprehensiones perceptuales, operativas y discursivas (Duval, 1999) para intentar identificar factores que influyen en el desarrollo de la comprensión del concepto de triángulo a lo largo de la Educación Primaria. Fischbein (1993) indica que los conceptos geométricos tienen una naturaleza perceptual y conceptual que condiciona la manera en la que se comprenden. Desde este punto de vista, los objetos geométricos, como el triángulo, son entidades mentales que reflejan propiedades perceptuales (forma, posición, tamaño) y propiedades conceptuales, que interactúan entre sí. La cuestión que plantea esta perspectiva tiene que ver con los factores que intervienen en la interacción entre lo perceptual y lo conceptual en el desarrollo de la comprensión del concepto triángulo.

Por otra parte, Duval (1995) indica que los factores que intervienen en el desarrollo de la comprensión del concepto de triángulo están vinculados a la coordinación entre las aprehensiones que deben ser realizadas por los niños/as. Duval indica que la *aprehensión perceptual* es la capacidad que tiene un individuo para reconocer o percibir las figuras, tanto en un plano como en profundidad, aparte de ser capaz de nombrar figuras y reconocerlas dentro de un subconjunto (es decir, identificar subconfiguraciones en una configuración geométrica dada); la *aprehensión discursiva* es la capacidad de vincular hechos geométricos a las figuras, así como realizar declaraciones sobre la denominación, definición, reconocimiento de las propiedades geométricas, entre otras; y la *aprehensión operativa* se define como la capacidad de modificar una figura para resolver problemas geométricos que incluye cambiar la posición u orientación. La relación entre estas aprehensiones está en la base del aprendizaje de la geometría y en particular, en el desarrollo de la comprensión de las figuras geométricas que permite asumir el vínculo entre las imágenes perceptuales y los atributos teóricos que definen la inclusión de la figura en una clase (Fischbein, 1993).

Así pues, en nuestra investigación nos preguntamos: ¿qué factores determinan la coordinación de las aprehensiones discursiva, operativa y perceptual en la relación entre lo perceptual y conceptual en el desarrollo de la comprensión del concepto triángulo?

Método

Participantes y contexto curricular

Participaron 45 niños de educación primaria de 6-12 años (Tabla 1). Los alumnos procedían de una escuela pública y fueron escogidos por sus maestros considerando diferentes rendimientos académicos y por su capacidad de comunicación.

Tabla 1

Participantes en la investigación. Número de alumnos/as por curso/edad

Curso	1°	2°	3°	4°	5°	6°	TOTAL
Edad (años)	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	6-12 años
Participantes	10	10	10	5	5	5	45 niños/as

El currículo relacionado con las figuras geométricas de primaria se organiza alrededor de la identificación, reconocimiento y construcción de figuras geométricas; así como con las clasificaciones siguiendo algún criterio, lo que permite introducir vocabulario específico de manera gradual.

Instrumento y procedimiento

Los datos se recogieron mediante entrevistas clínicas. Las tareas fueron diseñadas y/o adaptadas de investigaciones previas (Clements et al., 1999; Sarama y Clements, 2009) y tenían como objetivo identificar características de la manera en la que los niños reconocieran atributos de las figuras y cómo llegaban a considerar las figuras como ejemplos de clases más amplias (Tabla 2). Durante la entrevista, las figuras geométricas estaban representadas en tarjetas separadas y representadas con diferentes orientaciones (Figura 1) (Martin, Lukong & Reaves, 2007; Tsamir, et al., 2008). El guion de la entrevista clínica era el mismo para todos los cursos, excepto para los niños de primer curso, que no realizaron las tareas de diferenciar atributos de los triángulos (longitud de los lados y amplitud de los ángulos) al no formar parte del currículo de primero.

La entrevista estaba formada por 6 actividades, de las cuales 4 eran de clasificar. Para los niños de segundo y tercer curso, también se plantearon actividades centradas en las diferencias entre triángulos atendiendo a la *longitud de los lados* (triángulo equilátero, isósceles o escaleno) y a la *amplitud de los ángulos* (triángulo acutángulo, rectángulo u obtusángulo). Para las actividades en las que se tenían que agrupar las figuras se consideraron: agrupación libre y guiada (un criterio o varios criterios). Los datos de esta investigación lo constituyen las transcripciones de las grabaciones en video de las entrevistas, y las notas tomadas por la entrevistadora al finalizar cada entrevista.

Análisis

El análisis siguió los pasos descritos por Clement (2000) para generar descriptores y categorías de observación de manera inductiva centrándonos en lo que podían ser evidencias de la manera de pensar de los niños. Para ello, se visionaban los videos de las entrevistas para identificar aspectos relevantes de la forma de proceder de los niños, en cada tipo de tarea y, se leyeron las transcripciones para identificar las razones de los niños en sus respuestas. Para cada niño, describimos la resolución de cada actividad considerando las aprehensiones que ponían en práctica (perceptual, discursiva y operativa), y los atributos considerados en cada caso (número de lados, concavidad/convexidad, figuras cerradas/abiertas, lados rectos/curvos). A continuación,

generamos una inferencia de lo que parecía significar la conducta del niño desde la perspectiva del reconocimiento de los atributos de las figuras y su clasificación.

Resultados

Factores en el desarrollo de la comprensión del concepto triángulo

Un factor que determina el desarrollo de la comprensión del concepto de triángulo es la evolución de la influencia que las figuras prototípicas tienen en la coordinación de las aprehensiones perceptuales y discursivas. Dicha evolución en la coordinación se puso de manifiesto mediante la ampliación de los ejemplos vinculados a los términos usados para referirse a los triángulos según la longitud de sus lados y la amplitud de sus ángulos (lo perceptual) y, mediante la ampliación de los términos usados para referirse a los triángulos según los atributos considerados (lo conceptual, manifestado por la aprehensión discursiva).

Los ejemplos prototípicos para los triángulos suelen ser el triángulo equilátero y algunos isósceles con la base paralela al borde de la hoja/tarjeta. Cuando no se presentan así, a veces no llegan a identificarlos.

INV: *¿en qué se parecen estos dos triángulos que se diferencian de este?*



Figura 2. Tarea de reconocimiento de atributos.

N24: *pues que estos triángulos son "triángulos, triángulos" (izquierda) y este no se parece tanto (derecha).*

En la actividad de agrupar los triángulos atendiendo a algún criterio, si los ejemplos no son prototípicos, los niños muestran dificultades. Por ejemplo, se les proporcionan 9 tarjetas con figuras de triángulos y se les pide que los agrupen atendiendo a algún criterio (libremente). Las respuestas de los niños indican que usan una perspectiva perceptual aplicando como criterio la mayor o menor semejanza con alguna representación prototípica. Así, por ejemplo, en tercer curso,

INV: *Explícame, ¿por qué los has agrupado así?*

N29: *porque estas se parecen más a un triángulo (izquierda) y aquí no se parecen (derecha).*

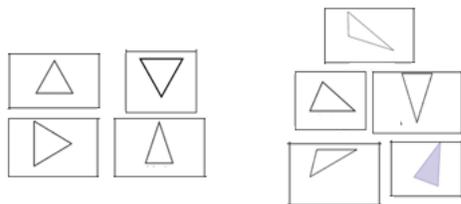


Figura 3. Tarea de clasificación de triángulos sin proporcionar criterio.

Estas respuestas indican que los niños asocian la palabra “triángulo” con las figuras prototípicas y no usan el concepto en sí mismo (triángulo: figura plana cerrada formada por tres lados rectos). La evolución de esta característica viene determinada a superar la dependencia de lo perceptual (la figura prototípica) para empezar a usar los atributos de los triángulos, como por ejemplo, la amplitud de los ángulos y/o la longitud de los lados (lo conceptual), aunque los niños/as, al principio, no usen los términos precisos sino explicaciones de los atributos que los diferencian.

INV: vale, explícame, ¿por qué los has agrupado así?

N37: los que no tienen ningún lado igual (1), los que tienen dos lados iguales (2) y los que tienen los tres lados iguales (3).

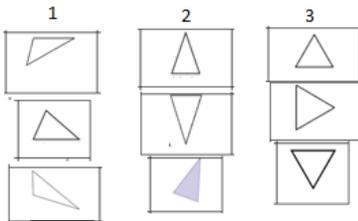


Figura 4. Tarea de clasificación de triángulos sin proporcionar criterio.

A partir de los 9 años, se inicia el conocimiento de los nombres de los triángulos atendiendo a la longitud de sus lados, aunque siguen usando los triángulos equiláteros como ejemplo prototípico de triángulo. A partir de los 10 años (4° EP), los niños/as pueden nombrar los triángulos atendiendo a la amplitud de sus ángulos usando, a veces, los términos adecuados:

INV: ¿En qué se parecen estas dos que se diferencian de esta?

N41: Este es acutángulo (derecha) y estos dos son obtusángulos (izquierda).



Figura 5. Tarea de reconocimiento de figuras.

Finalmente, entre los 10-12 años (5° y 6° EP), los niños reconocen los diversos atributos de los triángulos y los usan para realizar clasificaciones.

INV: explícame, ¿cómo has agrupado?

N62: he puesto todos los que tienen los lados diferentes, los escalenos (1), por otro lado, los que tienen dos lados iguales (2) y los equiláteros por otra parte (3).

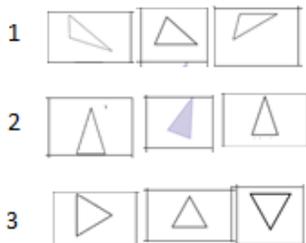


Figura 6. Tarea de agrupar triángulos según la longitud de sus lados.

Estas evidencias ponen de manifiesto la importancia de la coordinación de las aprehensiones perceptuales y de las aprehensiones discursivas para progresar en la comprensión del concepto de triángulo. Aunque perceptualmente, la identificación del triángulo se realiza a través de figuras prototípicas, la ampliación progresiva del vocabulario usado para identificar atributos (lados y/o ángulos), permite al niño realizar una construcción figural del triángulo, lo que le permite dar el salto a la aprehensión discursiva. Esta coordinación permite dotar de sentido a la definición del objeto geométrico triángulo como paso previo a la realización de clasificaciones usando dos atributos. Por ejemplo, el reconocimiento de triángulos rectángulos, escalenos y triángulos rectángulos isósceles.

Discusión y Conclusiones

Las figuras prototípicas favorecen la percepción de esta como un todo, impidiendo la discriminación de sus atributos, lo que generan muchas de las dificultades, a posteriori, para identificar y caracterizar una figura que no sea prototípica. Los resultados de esta investigación indican que, en los primeros años, las figuras prototípicas tienen mucho peso, pero que progresivamente esta influencia se va diluyendo a lo largo de los cursos, en la medida que los niños son más capaces de analizar las figuras y poder identificar los atributos que las diferencian. Esta evolución viene determinada para la ampliación del vocabulario específico y por el reconocimiento de los atributos que diferencian a los triángulos que pone de manifiesto evidencia una mejor coordinación entre las aprehensiones perceptivas y discursivas.

La amplia sobreexposición de los niños durante los primeros años de enseñanza, a figuras prototípicas, hace que los niños relacionen el término *triángulo* exclusivamente con los equiláteros y, algunos isósceles. Los triángulos escalenos son escasos o casi nulos (Scaglia y Moriena, 2005) en los libros de texto o ejemplos de los maestros. En los primeros cursos, los niños tienden a excluir de la categoría triángulo, aquellas figuras que aparecen rotadas o con lados diferentes de los habituales (prototipo), como señalan otras investigaciones (Yesil-Dagli & Halat, 2016). No obstante, en los últimos cursos los niños identifican la figura de manera conceptual considerando los atributos mínimos que forman su definición: percibían un triángulo como una figura cerrada de tres lados, independientemente de la longitud de sus lados y la amplitud de sus ángulos, es decir, hacían uso de la definición del concepto. De esta manera, la coordinación de lo perceptual con lo conceptual introduciendo paulatinamente la consideración de diferentes atributos permite a los niños/as construir la definición de triángulo y establecer relaciones considerando diferentes atributos (Tsamir, et al., 2008). Así, desde los primeros cursos los niños deberían estar expuestos a una mayor diversidad de ejemplos prototípicos, no prototípicos y contraejemplos de los diferentes conceptos geométricos (Fulkerson & Waxman, 2007; Waxman & Braun, 2005) que les permitiera, progresivamente, pasar de lo perceptivo a lo conceptual.

Reconocimientos: Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2014-54526-R del Ministerio de Economía y Competitividad, Gobierno de España.

Referencias

- Clement, J. (2000). Analysis of clinical Interviews: Foundations and Model Viability. En a. E. Kelly y R.A. Lesh (Eds.). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 547- 589). Lawrence Erlbaum Pubs: London.
- Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 192–212.
- Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education*. Berlin, Springer, pp. 142- 157.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME* . Cuernavaca, México. Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE, pp. 3-26.
- Duval, R. (2006). A Cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, 24(2), 139-162.
- Fujita, T. (2011). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 60-72.
- Fulkerson, A. L., & Waxman, S. R. (2007). Words (but not tones) facilitate object categorization: Evidence from 6-and 12-month-olds. *Cognition*, 105(1), 218-228.
- Halat, E. & Yesil-Dagli, U., (2016). Preschool Students' Understanding of a Geometric Shape, the Square. *BOLEMA*, 30(55), 830-848.
- Levenson, S. Tirosh, D. & Tsamir, P. (2011). *Preschool Geometry. Theory, Research and Practical Perspectives*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Martin, T., Lukong, A., & Reaves, R. (2007). The role of manipulatives in arithmetic and geometry tasks. *Journal of Education and Human Development*, 1(1), 1-14.
- Mesquita, A.L. (1998). On conceptual Obstacles Linked with External Representation in Geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 183-195.
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.
- Scaglia, S. & Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación Matemática*, 17(3), 105-120.
- Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: The case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 81-95.
- Waxman, S. R., & Braun, I. (2005). Consistent (but not variable) names as invitations to form object categories: new evidence from 12-month-old infants. *Cognition*, 95(3), B59-B68.
- Yesil-Dagli, U., & Halat, E. (2016). Young Children's conceptual Understanding of Triangle. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(2), 189-202.